Université Claude Bernard Lyon 1

M1 MEEF – Géométrie

Corrigé du partiel du vendredi 21 octobre 2022 - durée 2h

Les documents et les calculettes sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Les questions. – Les questions sont indépendantes les unes des autres. Chaque question rapporte 2 points. Sauf mention explicite du contraire, les espaces affines (et vectoriels) considérés sont de dimension finie.

1.– Soit $f : E \to E$ une application affine bijective et $\overrightarrow{f} : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E}$ son application linéaire associée. Montrer que $\overrightarrow{f}$ est bijective.

Rép.– Commençons par l'injectivité. Supposons qu'il existe $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ tel que $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$ et soit $O \in E$. Alors, par la formule de Grassmann,

$$\begin{array}{rcl} f(O+\overrightarrow{v}) & = & f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \\ & = & f(O). \end{array}$$

Puisque $O + \overrightarrow{v}$ et O sont distincts, ceci contredit l'injectivité de f. Ainsi $\overrightarrow{f}$ est injective. Par le théorème du rang, elle est également surjective donc bijective.

2.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une application affine. Montrer que si $Fix\ f$ est non vide alors c'est un sous-espace affine de E.

Rép.– Soit $A \in Fix\ f$ (qui est non vide). On va montrer que $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{AM} \mid M \in Fix\ f\}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$. Or

$$\begin{array}{rcll} \{\overrightarrow{AM} \mid M \in Fix\ f\} & = & \{\overrightarrow{AM} \mid f(M) = M\} & \\ & = & \{\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{AM}\} & \\ & = & \{\overrightarrow{AM} \mid \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{AM}\} & \text{car } f \text{ affine} \\ & = & Ker\,(\overrightarrow{f} - id_{\overrightarrow{E}}). & \end{array}$$

3.– Soient s_{Δ_1} et s_{Δ_2} deux réflexions. Décrire $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$ selon que Δ_1 et Δ_2 sont parallèles ou non (on ne demande pas la démonstration).

Rép.– Si Δ_1 et Δ_2 sont concourantes en un point I et forment un angle orienté de droites de $\theta/2$, alors $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1}$ est la rotation de centre I et d'angle θ. Si Δ_1 et Δ_2 sont parallèles alors $s_{\Delta_2} \circ s_{\Delta_1} = t_{\overrightarrow{u}}$ où $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\Delta}_1^{\perp}$ est tel que $t_{\overrightarrow{u}/2}(\Delta_1) = \Delta_2$.

4.– Soit $f : E \longrightarrow E$ une isométrie, $F = Fix\ f$, $A \in E \setminus F$, $A' = f(A)$, H l'hyperplan médiateur de $[A, A']$ et s_H la réflexion hyperplane d'hyperplan H. Montrer que $Fix\ g$ où $g = s_H \circ f$ contient F et A.

Rép.– Notons que A est fixe par g puisque $s_H(A') = A$.
Soit $M \in F$ alors $A'M' = AM$ car f est une isométrie et $A'M = AM$ car M est fixe. Donc M est dans l'hyperplan médiateur de $[A, A']$, i. e. $M \in H$. Mais alors $g(M) = M$ et $M \in Fix\ g$.

5.– Soient $h_{I,k}$ (resp. $h_{J,k'}$) l'homothétie de centre $I \in E$ (resp. $J \in E$) et de rapport $k > 0$ (resp. $k' > 0$). On suppose que $kk' \neq 1$. Montrer que $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ est une homothétie dont on déterminera le centre K en fonction de I, J, k et k'. On admettra que les applications affines dont la partie linéaire est kId avec $k \neq 1$ sont des homothéties de rapport k.

Rép.– La partie linéaire de $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ est une homothétie vectorielle de rapport $kk' \neq 1$, l'application affine $h_{I,k} \circ h_{J,k'}$ est donc une homothétie affine de rapport kk'. Soit K son centre. On a

$$\begin{aligned}
K &= h_{I,k}(h_{J,k'}(K)) \\
&= h_{I,k}(J + k'\overrightarrow{JK}) \\
&= h_{I,k}(J) + k'\overrightarrow{h_{I,k}}(\overrightarrow{JK}) \\
&= I + k\overrightarrow{IJ} + kk'\overrightarrow{JK} \\
&= I + k\overrightarrow{IJ} + kk'\overrightarrow{JI} + kk'\overrightarrow{IK} \\
&= I + k(1-k')\overrightarrow{IJ} + kk'\overrightarrow{IK}
\end{aligned}$$

d'où

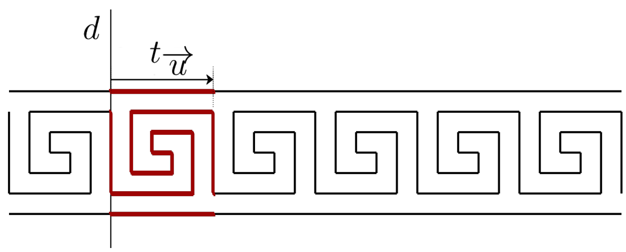
$$(1 - kk')\overrightarrow{IK} = k(1 - k')\overrightarrow{IJ}$$

et

$$K = I + \frac{k(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{IJ}.$$

Le problème. – (10 pts) Le but de ce problème est l'étude des frises du plan [1].

1. Ce problème est extrait du document *Frises du plan* d'Arnaud Rougirel.



Un exemple de frise, son motif apparaît en gras.

Première partie : Groupe de translations d'une figure.– Soit P le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormée $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ et $F \subset P$ un sous-ensemble non vide de P. On note

$$\mathcal{T} = \{t_{\overrightarrow{u}} \mid \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P}\}$$

le groupe des translations du plan et

$$\mathcal{T}(F) = \{t_{\overrightarrow{u}} \in \mathcal{T} \mid t_{\overrightarrow{u}}(F) = F\}$$

l'ensemble[2] des translations laissant F invariant.

1) Déterminer $\mathcal{T}(F)$ dans les cas suivants

i) $F = \{p\}$ où p est un point de P.

ii) $F = P$.

iii) $F = D$ où D est la droite affine de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et passant par $p \in P$.

Rép.– i) Puisque F est réduit à un point, la condition $t(F) = F$ équivaut à $t(p) = p$ c'est-à-dire à $t = id$. Ainsi $\mathcal{T}(\{p\}) = \{id\}$.
ii) Si $F = P$ alors nécessairement $t_{\overrightarrow{u}}(P) = P$ et $\mathcal{T}(P) = \mathcal{T}$.
iii) Soit $q \in D$. Par définition, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $q = \lambda\overrightarrow{v} + p$. Ainsi

$$t_{\overrightarrow{u}}(q) = t_{\overrightarrow{u}}(\lambda\overrightarrow{v} + p).$$

Puisque $t_{\overrightarrow{u}}$ est affine et que $\overrightarrow{t_{\overrightarrow{u}}} = id$ on a avec la formule de Grassmann

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{u}}(q) &= t_{\overrightarrow{u}}(p) + \overrightarrow{t_{\overrightarrow{u}}}(\lambda\overrightarrow{v}) \\ &= (p + \overrightarrow{u}) + \lambda\overrightarrow{v} \end{aligned}$$

2. Cet ensemble est en réalité un groupe. Démontrez-le chez vous en guise d'exercice. Ce n'est pas demandé dans ce devoir.

Or $t_{\overrightarrow{u}}(q) \in D$ si et seulement s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$t_{\overrightarrow{u}}(q) = \mu\overrightarrow{v} + p.$$

Il faut donc résoudre

$$p + \overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v} = \mu\overrightarrow{v} + p$$

soit encore

$$\overrightarrow{u} = (\mu - \lambda)\overrightarrow{v} \quad \text{i.e.} \quad \overrightarrow{u} \in Vect(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{D}.$$

Ainsi

$$\mathcal{T}(D) = \{t_{\overrightarrow{u}} \in \mathcal{T} \mid \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{D}\}.$$

2) On rappelle que la partie entière d'un nombre réel x, notée $E(x)$, est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x. Par exemple $E(1,5) = 1$, $E(-0,5) = -1$, $E(1) = 1$. Pour tout x, cette fonction vérifie l'équation

$$E(x+1) = E(x) + 1.$$

i) Dessiner avec soin le graphe $G \subset P$ de la fonction E :

$$G = \{(x, E(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Dans cette écriture, les coordonnées $(x, E(x))$ sont données dans le repère $\mathcal{R}$ et correspondent donc au point $O + x\overrightarrow{e} + E(x)\overrightarrow{e}_2$.

ii) Soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur de coordonnées $(1,1)$ dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$, autrement dit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2$. Montrer que $t_{\overrightarrow{u}}(G) \subset G$.

iii) Montrer que $t_{\overrightarrow{-u}}(G) \subset G$ et en déduire que $t_{\overrightarrow{u}}(G) = G$.

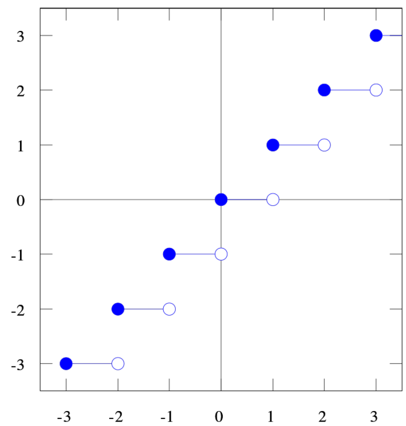
iv) Montrer que $t_{k\overrightarrow{u}} \in \mathcal{T}(G)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

v) Soit $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e}_1 + v_2\overrightarrow{e}_2$. On suppose que $t_{\overrightarrow{v}}(G) = G$. Montrer en considérant le point $(0,0) \in G$ que $v_2 \in \mathbb{Z}$ et que $v_2 \leq v_1$.

vi) Sous les hypothèses de la question précédente, montrer en considerant le point $(-v_1, E(-v_1)) \in G$ que $-v_2 \leq -v_1$.

vii) Déduire des questions précédentes que $\overrightarrow{v} = v_2\overrightarrow{u}$, $v_2 \in \mathbb{Z}$, et que $\mathcal{T}(G) = \{t_{k\overrightarrow{u}} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Rép.– i)



Le graphe G de la partie entière.

ii) Soit $(x, E(x)) \in G$, on a

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{u}}(O + x\overrightarrow{e}_1 + E(x)\overrightarrow{e}_2) &= O + x\overrightarrow{e}_1 + E(x)\overrightarrow{e}_2 + \overrightarrow{u} \\ &= O + (x+1)\overrightarrow{e}_1 + (E(x)+1)\overrightarrow{e}_2 \\ &= O + (x+1)\overrightarrow{e}_1 + E(x+1)\overrightarrow{e}_2 \end{aligned}$$

ce qui montre que $t_{\overrightarrow{u}}(x, E(x)) = (x+1, E(x+1)) \in G$ et par conséquent que $t_{\overrightarrow{u}}(G) \subset G$.
iii) Un calcul similaire montrerait que $t_{-\overrightarrow{u}}(x, E(x)) = (x-1, E(x-1)) \in G$ et donc que $t_{-\overrightarrow{u}}(G) \subset G$. En composant par $t_{\overrightarrow{u}}$ des deux côtés, on obtient $G \subset t_{\overrightarrow{u}}(G)$. Grâce à la question précédente on peut conclure : $G = t_{\overrightarrow{u}}(G)$.
iv) En composant à droite et à gauche l'égalité $G = t_{\overrightarrow{u}}(G)$ et en itérant k fois on obtient

$$t_{k\overrightarrow{u}}(G) = G$$

et donc $t_{k\overrightarrow{u}} \in \mathcal{T}(G)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
v) Soit $\overrightarrow{v} = v_1\overrightarrow{e}_1 + v_2\overrightarrow{e}_2$ tel que $t_{\overrightarrow{v}}(G) = G$. On a

$$t_{\overrightarrow{v}}(x, E(x)) = (x + v_1, E(x) + v_2)$$

en particulier, si $x = 0$, on obtient

$$t_{\overrightarrow{v}}(0, 0) = (v_1, v_2)$$

et puisque $t_{\overrightarrow{v}}(0, 0) \in G$ on doit avoir $v_2 \in \mathbb{Z}$. De plus, puisque $E(x) \leq x$, on doit également avoir $v_2 \leq v_1$.
vi) On applique la translation $t_{\overrightarrow{v}}$ au point indiqué dans l'énoncé

$$t_{\overrightarrow{v}}(-v_1, E(-v_1)) = (0, E(-v_1) + v_2).$$

Puisque ce point est dans G cela implique

$$E(-v_1) + v_2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad E(-v_1) = -v_2$$

et puisque $E(-v_1) \leq -v_1$ on obtient $-v_2 \leq -v_1$.
vii) Puisque $v_2 \leq v_1$ et que $-v_2 \leq -v_1$, on a nécessairement $v_1 = v_2$. Puisque $v_2 \in \mathbb{Z}$, cela montre que $\overrightarrow{v} = v_2 \overrightarrow{u}$. On en déduit

$$\mathcal{T}(G) \subset \{t_{k\overrightarrow{u}} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Mais d'après la question iv)

$$\mathcal{T}(G) \supset \{t_{k\overrightarrow{u}} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

d'où l'égalité $\mathcal{T}(G) = \{t_{k\overrightarrow{u}} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Seconde partie : Frises.– On dit que $F \subset P$ est une *frise* s'il existe un vecteur non nul $\overrightarrow{u} \in P$ tel que

$$\mathcal{T}(F) = \{t_{k\overrightarrow{u}} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

On précise parfois directement un générateur de $\mathcal{T}(F)$ en parlant de *frise de vecteur* $\overrightarrow{u}$. La question 2 montre que le graphe G de la fonction entière E est une frise de vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e}_1 + \overrightarrow{e}_2$. Aucun des trois ensembles traités en question 1 n'est une frise.

3) i) Soit $f : P \to P$ une application affine. Montrer que

$$t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})} \circ f = f \circ t_{\overrightarrow{v}}.$$

ii) On suppose maintenant que f est inversible. Montrer qu'il en est de même pour $\overrightarrow{f}$.

Rép.– i) Soit $M \in P$ un point quelconque, on a

$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})} \circ f(M) &= f(M) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v}) \\ &= f(M + \overrightarrow{v}) \\ &= f \circ t_{\overrightarrow{v}}(M). \end{aligned}$$

ii) D'après la formule de Grassmann, l'application $\overrightarrow{f}$ est inversible. En effet, si M et N sont deux points quelconques de P alors d'après la formule de Grassmann

$$f(M) = f(N) \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{O}.$$

Puisque l'application $\overrightarrow{f}$ est inversible, elle est injective et

$$f(M) = f(N) \quad \Longleftrightarrow \quad M = N \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{O}.$$

Au bilan
$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{O} \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{O}$$
ce qui montre que $\overrightarrow{f}$ est injective. Le théorème du rang permet alors de conclure à l'inversibilité de $\overrightarrow{f}$.

4) Soit F une frise de vecteur $\overrightarrow{u}$ et $f : P \to P$ une application affine inversible.

i) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $t_{k\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})} \in \mathcal{T}(f(F))$.

ii) Réciproquement, montrer que si $t_{\overrightarrow{v}} \in \mathcal{T}(f(F))$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$. *Suggestion.–* On pourra utiliser l'inversibilité de f.

iii) Montrer que $f(F)$ est une frise de vecteur $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$.

Rép.– i) Il faut montrer que pour tout M, l'image de $f(M)$ par $t_{k\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})}$ est un élément de $f(F)$. Or, d'après la question précédente, on a
$$t_{k\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})}(f(M)) \quad = \quad f \circ t_{k\overrightarrow{u}}(M)$$
donc
$$t_{k\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})}(f(F)) = f(t_{k\overrightarrow{u}}(F))$$
et comme $t_{k\overrightarrow{u}} \in \mathcal{T}(F)$, on a $t_{k\overrightarrow{u}}(F) = F$ et on obtient $t_{k\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})}(f(F)) = F$. Ceci montre que
$$\{t_{k\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})} \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{T}(f(F)).$$

ii) Soit $t_{\overrightarrow{w}} \in \mathcal{T}(f(F))$. Puisque f est inversible, il en est de même de $\overrightarrow{f}$ d'après la question précédente, il existe donc $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{P}$ tel que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$. On a alors
$$\begin{aligned} t_{\overrightarrow{v}}(F) &= t_{\overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{w})} \circ f^{-1}(f(F)) \\ &= f^{-1} \circ t_{\overrightarrow{w}}(f(F)) \\ &= f^{-1} \circ f(F) \\ &= F \end{aligned}$$
d'après 3.i) et le fait que $t_{\overrightarrow{w}} \in \mathcal{T}(f(F))$. Ainsi $\overrightarrow{v} \in \mathcal{T}(F)$ et il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$. On vient de montrer que
$$\mathcal{T}(f(F)) \subset \{t_{k\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

iii) Au bilan, les questions i) et ii) montrent que
$$\mathcal{T}(f(F)) = \{t_{k\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})} \,|\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Autrement dit, $f(F)$ est une frise de vecteur $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{u})$.

Troisième partie : Motif d'une frise.– Soit F une frise de vecteur $\overrightarrow{u}$ et d une droite telle que $\overrightarrow{d}$ et $\overrightarrow{u}$ soient perpendiculaires. Une partie $\mathcal{M} \subset F$ de la forme

$$\mathcal{M} = F \cap \{N + \lambda\overrightarrow{u} \mid N \in d,\ \lambda \in [0,1]\}$$

est appelé un *motif* de F.

5) Donner, sans justification, un motif du graphe G de la fonction entière E. Le dessiner.

Rép.– L'ensemble $\mathcal{M}$ défini par

$$\mathcal{M} = \{(x,0) \mid x \in [0,1[\} \cup \{(1,1)\}$$

est un motif du graphe G de la fonction entière E.

6) Soit $\Omega \in d$. On considère le repère $\widetilde{\mathcal{R}} = (\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_d})$ où $\overrightarrow{v_d}$ est un vecteur directeur de d. Si $M \in P$ est un point quelconque, on note (X, Y) ses coordonnées dans ce repère :

$$M = \Omega + X\overrightarrow{u} + Y\overrightarrow{v_d}.$$

i) Donner une équation paramétrique de d et en déduire une équation cartésienne de d dans le repère $\widetilde{\mathcal{R}}$.

ii) On considère la projection orthogonale $proj : P \to P$ sur la droite d. Soit $M \in P$ un point quelconque de coordonnées (X, Y). Déterminer les coordonnées (X', Y') du projeté $M' = proj(M)$. On rappelle que M' est caractérisé par le fait que $M' \in d$ et que les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{v_d}$ sont perpendiculaires.

Rép.– i) Puisque la droite d passe par Ω et admet $\overrightarrow{v_d}$ comme vecteur directeur, une équation paramétrique de d est donnée par

$$Y \longmapsto \Omega + Y\overrightarrow{v_d}.$$

On en déduit qu'une équation cartésienne de d dans le repère $\widetilde{\mathcal{R}}$ est $X = 0$.
ii) Nous avons

$$\overrightarrow{MM'} = (X' - X)\overrightarrow{u} + (Y' - Y)\overrightarrow{v_d}.$$

Puisque $M' \in d$, nous avons d'après l'équation cartésienne de d, $X' = 0$. Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_d}$ sont perpendiculaires, on a également

$$\langle \overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{v_d} \rangle = (Y' - Y)\langle \overrightarrow{v_d}, \overrightarrow{v_d} \rangle.$$

Ce nombre est nul si et seulement si $Y' = Y$. En fin de compte

$$proj(X, Y) = (0, Y).$$

Autrement dit $M' = \Omega + Y\overrightarrow{v_d}$.

7) Soit $\mathcal{M}$ un motif d'une frise F de vecteur $\overrightarrow{u}$.

i) Montrer que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} t_{k\overrightarrow{u}}(\mathcal{M}) \subset F.$$

ii) Soit $M \in F$ et $M' = proj(M)$ son projeté orthogonal sur d. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in [0, 1[$ tels que

$$\overrightarrow{M'M} = (k + \lambda)\overrightarrow{u}.$$

iii) On pose $M_\lambda = M' + \lambda\overrightarrow{u}$. Montrer que $M = t_{k\overrightarrow{u}}(M_\lambda)$.

vi) En déduire $M_\lambda \in F$ puis que $M_\lambda \in \mathcal{M}$.

v) Montrer que

$$F = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} t_{k\overrightarrow{u}}(\mathcal{M}).$$

Rép.– i) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\mathcal{M} \subset F \quad \Longrightarrow \quad t_{k\overrightarrow{u}}(\mathcal{M}) \subset t_{k\overrightarrow{u}}(F) = F$$

ainsi

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} t_{k\overrightarrow{u}}(\mathcal{M}) \subset F.$$

ii) On a

$$\overrightarrow{M'M} = (X - X')\overrightarrow{u} + (Y - Y')\overrightarrow{v_d}.$$

D'après la question 6ii), $X' = 0$ et $Y' = Y$ d'où

$$\overrightarrow{M'M} = X\overrightarrow{u}.$$

Il suffit de poser $k = E(X)$ et $\lambda = X - E(X)$ pour obtenir le résultat demandé.

iii) Notons que

$$\begin{aligned} M &= \Omega + X\overrightarrow{u} + Y\overrightarrow{v_d} \\ &= M' + X\overrightarrow{u} \\ &= M' + \lambda\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{u} \\ &= M_\lambda + k\overrightarrow{u} \\ &= t_{k\overrightarrow{u}}(M_\lambda). \end{aligned}$$

iv) On déduit de iii) que $M_\lambda = t_{-k\overrightarrow{u}}(M)$. Puisque $M \in F$ et que $t_{-k\overrightarrow{u}}(F) = F$, on en déduit $M_\lambda \in F$. Par son écriture, le point M_λ est aussi un élément de

$$\{N + \lambda\overrightarrow{u} \mid N \in d,\, \lambda \in [0,1]\}.$$

C'est donc un élément de l'intersection

$$\mathcal{M} = F \cap \{N + \lambda\overrightarrow{u} \mid N \in d,\, \lambda \in [0,1]\}.$$

v) Soit M un point quelconque de F. D'après ce que l'on vient de faire, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t_{-k\overrightarrow{u}}(M) \in \mathcal{M}$ donc $M \in t_{k\overrightarrow{u}}(\mathcal{M})$ ce qui montre que

$$F \subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} t_{k\overrightarrow{u}}(\mathcal{M}).$$

L'égalité s'obtient grâce à la question i).