

Université Claude Bernard Lyon 1
Licence 3 Calcul Différentiel
Contrôle continu
Lundi 12 novembre 2007 - Durée 3 heures

Les documents et les calculs sont interdits. Les exercices sont indépendants les uns des autres. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Question de cours. – (2 pts) Énoncer le théorème des fonctions implicites.

L'exercice du cours. – (2 pts) Soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. Montrer que B est différentiable et déterminer sa différentielle.

Exercice 1. – (3 pts) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par:

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^{2p} + y^{2q} - x^p y^q}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

Dans les trois cas suivants, déterminer si la fonction est continue, différentiable en $(0, 0)$, et le cas échéant calculer $df_{(0,0)}$.

- 1) $p = q = 1$;
- 2) $p = q = 2$;
- 3) $p = 3, q = 0$.

(On pensera à vérifier tout d'abord que la fonction est bien définie).

Exercice 2. – (5 pts) Soient $D^2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ et $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application C^1 telle que $f(0) = 0$. Pour tout $t \in]0, 1[$ on pose :

$$f^t(x) = \frac{1}{t} f(tx) \quad (*).$$

ÉTUDE DE CAS PARTICULIERS.

1) Déterminer f^t dans le cas où f est la restriction à D^2 d'une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. En déduire l'application limite $\lim_{t \rightarrow 0} f^t$.

2) Mêmes questions pour $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2, x_1^2 + x_2^2)$.

LE CAS GÉNÉRAL.

3) Montrer que pour tout $x \in D^2$, on a $\lim_{t \rightarrow 0} f^t = df_{(0,0)}(x)$. (*Suggestion.*
– Ecrire la définition de la différentielle de f au point $a = (0, 0)$ en prenant $h = tx$).

4) Montrer que f^t est de classe C^1 sur D^2 et que :

$$\forall x \in D^2, \forall t \in]0, 1], \quad (df^t)_x = df_{tx}.$$

En déduire que :

$$\forall x \in D^2, \quad \lim_{t \rightarrow 0} (df^t)_x = df_{(0,0)}.$$

5) On dit que $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un *plongement* si f est injective et si de plus, pour tout $x \in D^2$, $df_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est injective.

a) Montrer que si f est un plongement alors $df_{(0,0)} : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un plongement.

b) Montrer que si f est un plongement alors pour tout $t \in]0, 1]$, $f^t : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un plongement.

Commentaire. – La formule (*), qui permet de relier l'application f à sa différentielle, joue un rôle très important en *topologie différentielle*. Elle est due au mathématicien J. Alexander (1888-1971).

Problème (8 pts)

PARTIE A.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} telle que $f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$.

1) En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0) + a(x)x^2$$

où $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et garde un signe constant sur un voisinage U_0 de 0.

2) Soit

$$\begin{aligned} \phi_0 : U_0 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto X = \operatorname{sgn}(a(0)) \cdot \sqrt{|a(x)|} \cdot x. \end{aligned}$$

Montrer que :

- a) ϕ_0 est inversible sur un voisinage $U_1 \subset U_0$ de 0.
- b) $\forall X \in \phi_0(U_1), f \circ \phi_0^{-1}(X) = f(0) \pm X^2$ selon le signe de $a(0)$.

PARTIE B.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 telle que $df_{(0,0)} = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \neq 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$.

3) On considère l'équation $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Montrer qu'il existe deux voisinages $\mathcal{V}(0)$ et $\mathcal{W}(0)$ de $0 \in \mathbb{R}$ et une fonction $\psi : \mathcal{V}(0) \rightarrow \mathcal{W}(0)$ de classe C^∞ sur $\mathcal{V}(0)$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{V}(0) \times \mathcal{W}(0), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff y = \psi(x).$$

4) Soit

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{V}(0) \times \mathcal{W}(0) &\longrightarrow \mathcal{W}(0) \\ (x,y) &\longmapsto (x, y + \psi(x)). \end{aligned}$$

Montrer que :

- a) $d\Psi_{(0,0)} = Id$.
- b) Pour tout $x \in \mathcal{V}(0), \frac{\partial}{\partial y}(f \circ \Psi)(x,0) = 0$.
- c) $d^2(f \circ \Psi)_{(0,0)} = d^2 f_{(0,0)}$. On rappelle que

$$d^2(f \circ \Psi)_{(x,y)}(X,Y) = d^2 f_{\Psi(x,y)}(d\Psi_{(x,y)}(X), d\Psi_{(x,y)}(Y)) + df_{\Psi(x,y)}(d^2 \Psi_{(x,y)}(X,Y)).$$

5) On pose $h = f \circ \Psi$ et on note h_x l'application $y \mapsto h(x,y)$. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathcal{V}(0) \times \mathcal{W}(0), h_x(y) = h_x(0) + a_x(y) \cdot y^2$$

où $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x,y) \mapsto a_x(y)$ garde un signe constant sur un voisinage $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{V}(0) \times \mathcal{W}(0)$ de $(0,0)$.

6) Soit

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{U}_0 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x, Y = \operatorname{sgn}(a(0,0)) \cdot \sqrt{|a_x(y)|} \cdot y). \end{aligned}$$

Montrer que :

- a) ϕ est inversible sur un voisinage $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_0$ de $(0, 0)$.
- b) $\forall (x, Y) \in \mathcal{U}_1, \quad h \circ \phi^{-1}(x, Y) = h(x, 0) \pm Y^2$ selon le signe de $a(0, 0)$.

PARTIE C.

7) Dédurre des parties A et B que si $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ est telle que $df_{(0,0)} = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \neq 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$ alors il existe deux voisinages $\mathcal{U}(0)$ et $\mathcal{U}'(0)$ de $0 \in \mathbb{R}^2$ et un difféomorphisme $\varphi : \mathcal{U}(0) \rightarrow \mathcal{U}'(0)$ tel que pour tout $(X, Y) \in \mathcal{U}(0)$ on ait :

$$f \circ \varphi(X, Y) = f(0, 0) \pm X^2 \pm Y^2$$

où le signe de X^2 (resp. Y^2) est celui de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$ (resp. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)$).

Commentaire. – Ce résultat est connu sous le nom de *lemme de Morse*. Il reste vrai sous des hypothèses plus générales : Si $f : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ est telle que $df_{(0,0)} = 0$ et $d^2 f_{(0,0)}$ = forme quadratique non dégénérée, on a alors

$$f \circ \varphi(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{2} d^2 f_{(0,0)} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right).$$