Université Claude Bernard Lyon 1

Licence 3 Calcul Différentiel

Examen, première session

Jeudi 20 décembre 2007 - Durée 3 heures

Les documents et les calculettes sont interdits. Les exercices sont indépendants les uns des autres. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Question de cours. – (2 pts) Enoncer le théorème de Cauchy linéaire.

L'exercice du cours. – (2 pts) Nature des points critiques de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (1 - x^2)(1 - y^2)$.

Exercice 1. – (3 pts) Soient

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x + z \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ z - y \end{pmatrix} \end{array}.$$

On note $\Gamma = g^{-1}(\{(0, 0)\})$. Déterminer les extrema globaux de $f_{|\Gamma}$.

Exercice 2. – (3 pts) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la solution générale de l'équation différentielle :

$$X' = AX + B$$

où ${}^tX = (x_1, x_2, x_3)$ est l'inconnue.

1) Déterminer e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$. (*Suggestion.* – Si B et C commutent alors $e^{B+C} = e^B e^C$.)

2) Résoudre le système homogène $X' = AX$.

3) Résoudre $X' = AX + B$.

Problème (10 pts) Soient $\epsilon \in \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. On pose

$$(\Sigma_\epsilon) \quad \left\{ \begin{array}{rcr} x' & = & -y - x(x^2+y^2-\epsilon^2) \\ y' & = & x - y(x^2+y^2-\epsilon^2) \end{array} \right.$$

et on note

$$\gamma :]t_-, t_+[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$

la solution maximale de (Σ_ϵ) telle que $\gamma(0) = (x_0, y_0)$.

PARTIE A. – On suppose $\epsilon = 0$.

1) a) Montrer que $t \longmapsto \|\gamma(t)\|^2$ est strictement décroissante.

b) En déduire que $t_+ = +\infty$.

2) a) Montrer que $t \longmapsto \|\gamma(t)\|^2$ est solution d'une EDO du premier ordre et en déduire l'expression de $\|\gamma(t)\|$.

b) Montrer que $t_- > -\infty$.

3) La solution maximale $\gamma(t)$ a-t-elle une limite quand $t \to t_+$? Quand $t \to t_-$?

PARTIE B. – On suppose $\epsilon \neq 0$

4) Montrer que le système admet une orbite périodique ainsi qu'un unique point d'équilibre.

Dans les trois questions qui suivent on suppose $\|\gamma(0)\|^2 < \epsilon^2$.

5) Montrer que $t_+ = +\infty$ et $t_- = -\infty$.

6) Montrer que pour $t \in]t_-, t_+[$ on a :

$$\|\gamma(t)\|^2 = \frac{\epsilon^2}{1 + e^{-2\epsilon^2(t+K)}}$$

où K est tel que $e^{-2\epsilon^2 K} = 1 - \dfrac{\epsilon^2}{x_0^2 + y_0^2}$.

7) Déduire de 6) et 7) que l'orbite de (x_0, y_0) tend vers le point d'équilibre si $t \to -\infty$ et qu'elle s'accumule le long d'une orbite périodique si $t \to +\infty$.

On suppose maintenant $\|\gamma(0)\|^2 > \epsilon^2$.

8) Montrer que $t_+ = +\infty$.

9) Donner l'expression de la fonction $t \mapsto \|\gamma(t)\|^2$ et en déduire que $t_- > -\infty$. L'orbite de (x_0, y_0) est-elle bornée ?