

Université Claude Bernard Lyon 1
Licence 3 Calcul Différentiel

Examen, seconde session

Mercredi 23 janvier 2008 - Durée 2 heures 30 minutes

Les documents et les calculettes sont interdits. Les exercices sont indépendants les uns des autres. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Question de cours. – (2 pts) Énoncer le théorème des extrema liés (dans le cas d'une contrainte, c'est à dire où la fonction g est à valeurs dans \mathbb{R}).

Un calcul. – (3 pts) Résoudre sur l'intervalle $]0; +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$y' + \frac{1}{t}y = \exp(t^2)$$

Exercice 1. – (3 pts) On considère la fonction trace $\text{tr} : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ qui à une matrice associe la somme de ses coefficients diagonaux. Calculer la différentielle de l'application suivante :

$$\begin{aligned} \phi : M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \sqrt{1 + (\text{tr}(A))^2} \end{aligned}$$

Exercice 2. – (3 pts) On considère une fonction f sur l'ensemble S suivant

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq -\frac{1}{2} \right\}$$

définie par :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

1) Montrez que la fonction $(x, y) \mapsto \|f(x, y)\|$ tend vers l'infini lorsque $\|(x, y)\|$ tend vers l'infini.

2) Déterminez la nature des extrema sur l'ouvert $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > -\frac{1}{2}\}$.

3) Déterminez les extrema globaux sur S .

Exercice 3. – (4 pts) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 . On appelle Γ l'ensemble suivant :

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x, y) = 0\}.$$

On supposera que la différentielle de f est non nulle en tout point de Γ .

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Dans un premier temps, on suppose que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$.

1) Montrez qu'au voisinage de (a, b) , l'ensemble Γ est le graphe d'une fonction (définie localement) $\phi : x \mapsto y = \phi(x)$.

2) Montrez que l'équation de la tangente $T_{(a,b)}\Gamma$ à Γ au point $(a, b) \in \Gamma$ est donnée par : $(x, y) \in T_{(a,b)}\Gamma$ si et seulement si

$$df_{(a,b)}(x, y) = df_{(a,b)}(a, b).$$

3) *Application* : Soit \mathcal{C} la courbe d'équation $2y + x^3 + xy^3 = 0$. Quelle est l'équation de la tangente en $(-1, 1)$?

4) Qu'aurait-on pu dire si on avait eu $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$?

Exercice 4. – (5 pts) On considère l'équation différentielle scalaire d'ordre deux suivante :

$$y'' + \alpha y' + y = \sin(\omega t) \tag{1}$$

où α est un réel positif qu'on appelle coefficient d'amortissement du système.

1) Montrer que le système que l'on considère est équivalent au système d'ordre un et de dimension deux suivant :

$$Y' + AY = B(t) \tag{2}$$

où A est la matrice 2×2 suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

et B est une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 que l'on déterminera (c'est-à-dire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $B(t)$ est une matrice-colonne de taille 2).

On considère maintenant l'équation homogène associée :

$$y'' + \alpha y' + y = 0 \quad (3)$$

où, de manière équivalente,

$$Y' + AY = 0 \quad (4)$$

2) a) Calculer les valeurs propres de A . La matrice A est-elle diagonalisable ? Discuter en fonction des valeurs de α .

b) Dans le cas où A est diagonalisable, trouver les vecteurs propres de A .

3) Montrez que si v est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , on a :

$$(\exp A).v = e^{\lambda}v$$

En déduire les solutions de l'équation homogène (4), puis (3), dans le cas où A est diagonalisable.

4) On suppose α , choisi de telle sorte que A ne soit pas diagonalisable. Trouver les solutions de (4), puis (3).

Indication : On pourra trigonaliser A et calculer son exponentielle.