Université Claude Bernard Lyon 1

Licence 3 Calcul Différentiel

Examen, seconde session

Lundi 19 Janvier 2009 - Durée 2 heures 30 minutes

Les documents et les calculettes sont interdits. Les exercices sont indépendants les uns des autres. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Question de cours. – (2 pts) Enoncer le théorème dit *Principe de sortie de tout compact.*

Un calcul. – (2,5 pts) Résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$y' + \frac{2}{t}y = \frac{3}{t^2}.$$

Exercice 1. – (3 pts) On considère la fonction trace $tr : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à une matrice associe la somme de ses coefficients diagonaux. Calculer la différentielle de l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & exp(tr(A^2)). \end{array}$$

Exercice 2. – (3,5 pts) Soit

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^4 + y^4 - 2(x-y)^2. \end{array}$$

1) Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto \|f(x, y)\|$ tend vers l'infini quand $\|(x, y)\|$ tend vers l'infini.

2) Déterminer la nature des points critiques de f.

3) Déterminer les extrema globaux de f.

Exercice 3. – (4 pts) Soient $a > 0$, $b > 0$ et

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1. \end{array}$$

On pose

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$$

et on note $P_0 = (x_0, y_0)$ un point quelconque de E.

1) A quelle(s) condition(s) sur P_0 peut-on appliquer le théorème de la fonction implicite à tout voisinage suffisamment petit de P_0 de façon à

a) Exprimer y en fonction de x ?

b) Exprimer x en fonction de y ?

2) Quelle est la pente de la droite tangente à E en P_0 ?

3) En déduire l'équation cartésienne de la tangente à E au point P_0.

Exercice 4. – (5 pts) On rappelle qu'une partie U d'un espace vectoriel est *convexe* si pour tout $(u,w) \in U^2$ et tout $t \in [0,1]$, on a $tu + (1-t)w \in U$. On dit que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est *convexe* si

$$\forall (u,w) \in U^2,\ \forall t \in [0,1], \quad f(tu + (1-t)w) \leq t f(u) + (1-t) f(w).$$

Soit $U \subset \mathbb{R}$ un ouvert convexe et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1) Soient $(u,v,w) \in U^3$ tels que $u < v < w$.

a) Montrer que

$$(w-u) f(v) \leq (w-v) f(u) + (v-u) f(w).$$

b) En déduire la formule dite *des trois cordes* :

$$\frac{f(v) - f(u)}{v-u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w-u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w-v}.$$

2) On suppose que f est dérivable sur U. Soit $x_0 \in U$, montrer que

$$\forall x \in U,\ x \neq x_0,\ \ f'(x_0) \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

En déduire que

$$\forall x \in U, \quad f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

3) On suppose désormais que U est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ étant toujours supposée convexe. Montrer que

$$\forall x \in U, \quad f(x) \geq f(x_0) + df_{x_0}(x - x_0).$$

(*Indication.–* On pourra considérer la fonction $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$).

4) Montrer que si x_0 est un point critique de f alors f admet un minimum global en x_0.