L2. Application du calcul différentiel aux courbes et surfaces

Mercredi 4 Avril 2007. Durée : 1h30

Les notes de cours sont autorisées.

Problème 1. Soient $I =]-2\pi, 2\pi]$ et $\gamma : \ I \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée donnée par

$$t \longmapsto (x(t) = 1 + \cos t + 2\cos\frac{t}{2}, y(t) = \sin t).$$

Cette courbe est parfois appelée *la torpille*.
1) La courbe paramétrée γ est-elle régulière ?
2) Montrer que γ admet l'origine $(0,0)$ comme point triple.
3) Montrer au moyen d'un tableau de variation que la fonction $x'y'' - x''y'$ est strictement positive. En déduire que la courbure algébrique $k_{alg}(t)$ de γ en $\gamma(t)$ garde un signe constant quel que soit $t \in I$.
4) Donner l'allure de Γ en faisant apparaître les symétries éventuelles, les droites tangentes verticales et horizontales, et le point triple.
(*On rappelle que :* $\sin t = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$.)

Problème 2. Soit $\mathcal{F} = \{\Gamma_c \mid c \in \mathbb{R}\}$ la famille de courbes planes définies par

$$\Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + x^4 - x^2 = c\}.$$

1) Déterminer les valeurs de c pour lesquelles Γ_c est régulière.
2) Donner l'allure de la courbe Γ_c pour $c = -1/4$, $c = -1/8$, $c = 0$ et $c = 1$.
3) Déterminer la droite tangente de Γ_0 en $(1,0)$.
4) Déterminer la courbure de Γ_0 en $(1,0)$.

Problème 3. Soient $a > 0$ et $\gamma : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $t \mapsto (t, ch\ t)$.
1) Montrer que γ est birégulière. Calculer sa normale algébrique N_{alg} et sa courbure algébrique k_{alg}.
2) La courbe développée de γ est la courbe :

$$t \longmapsto \Gamma(t) = \gamma(t) + \frac{1}{k_{alg}(t)} N_{alg}(t).$$

La courbe développée Γ est-elle régulière ?
3) Calculer la longueur de l'image $\Gamma([-a,a])$.
4) Montrer que le point $(0,2)$ est un point de rebroussement de première espèce de la courbe Γ.