Université Claude Bernard Lyon 1

Licence 2 – Courbes et surfaces

Contrôle continu final, première session

Mercredi 16 juin 2010 - Durée 2 heures

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Les deux exercices sont indépendants. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier. Dans les questions, I est un intervalle ouvert non vide et toutes les applications sont C^∞ sauf mention explicite du contraire.

1.– Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f'(0) = 0$. La courbe paramétrée $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (t, f(t))$ n'est pas régulière en $t = 0$.

2.– La courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (t, 2t)$ est birégulière.

3.– Si une courbe paramétrée n'a pas de point d'inflexion alors elle est birégulière.

4.– Soient $b > a > 0$ et $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (a \cos t, b \sin t)$. L'aire du domaine délimité par γ vaut $\dfrac{ab}{2}$.

5.– Soit γ la courbe paramétrée de la question précédente et $P, Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions C^∞ quelconques alors $\int_\gamma P(x)dx + Q(y)dy = 0$.

6.– Soit $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $t \longmapsto (\cos t, \sin 2t)$. L'indice de rotation de rotation de f vaut 2.

7.– Soit f l'application de la question précédente. Le nombre de rotation de f par rapport au point de coordonnées $(100, 100)$ vaut 2.

8.– La surface paramétrée $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie ci-dessous est régulière :

$$(u,v) \longmapsto ((2+\cos u)\cos v, (2+\cos u)\sin v, \sin u).$$

9.– Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $s \longmapsto (x(s), z(s))$ une courbe paramétrée régulière et $f : [a,b] \times [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(s,\theta) \longmapsto (x(s)\cos\theta, x(s)\sin\theta, z(s))$. L'aire de la surface paramétrée f est

$$2\pi \int_a^b x(s)ds.$$

10.– La surface $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1\}$ admet un des axes de coordonnées comme axe de rotation.

Exercice 1. – Soient I un intervalle qui contient 0 et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière paramétrée par la longueur d'arc. On suppose que γ admet en $s = 0$ un cercle osculateur $\mathcal{C}$ de centre l'origine, de rayon $R > 0$ et dont une paramétrisation est donnée par :

$$\begin{array}{rccc} \delta : & [0, 2\pi R] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longmapsto & (R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R}). \end{array}$$

On note $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $f(s) := \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle$.

1) Pour quelle raison $f'(0) = 0$?

2) Montrer que $f''(0) = 0$.

3) Montrer que $f'''(0) = -\frac{2k'(0)}{k(0)}$ où $k : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est la courbure principale de γ.

4) Montrer que :

$$\forall s \in I, \qquad f(s) - R^2 = -\frac{k'(0)}{3k(0)} s^3 + o(s^3).$$

5) On suppose $k'(0) \neq 0$. Montrer que le support de γ traverse le cercle osculateur $\mathcal{C}$.

Exercice 2. – Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe birégulière paramétrée par la longueur d'arc.

1) Donner une paramétrisation de la développée β de γ (on rappelle que la développée d'une courbe plane est le lieu de ses centres de courbure).

2) On note $R : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, la fonction $R(s) = k(s)^{-1}$ où $k : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est la courbure principale de γ. Montrer que :

$$Long(\beta) = \int_I |R'(s)| ds.$$

3) On suppose désormais que k' ne s'annule pas. Soient s_1, s_2 dans I, $s_1 < s_2$, montrer que la longueur d'arc entre $\beta(s_1)$ et $\beta(s_2)$ est $|R(s_2) - R(s_1)|$.

4) Soient C_1 et C_2 deux cercles de centre respectif Ω_1 et Ω_2 et de rayon R_1 et R_2. Montrer que si $dist(\Omega_1, \Omega_2) < |R_2 - R_1|$ alors les deux cercles sont disjoints : $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. (*Suggestion.*– Supposer le contraire et faire jouer l'inégalité triangulaire).

5) Montrer que si k' ne s'annule pas alors les cercles osculateurs de γ sont deux à deux disjoints (ce résultat s'appelle le *théorème de Tait*, il a été démontré en 1895).