Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie

Corrigé du contrôle continu 2 du 10 novembre 2020

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Problème. – Dans tout le problème, on travaille dans le plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire. Le but de ce problème est de démontrer le théorème de Holditch. Il est composé de trois parties relativement indépendantes.

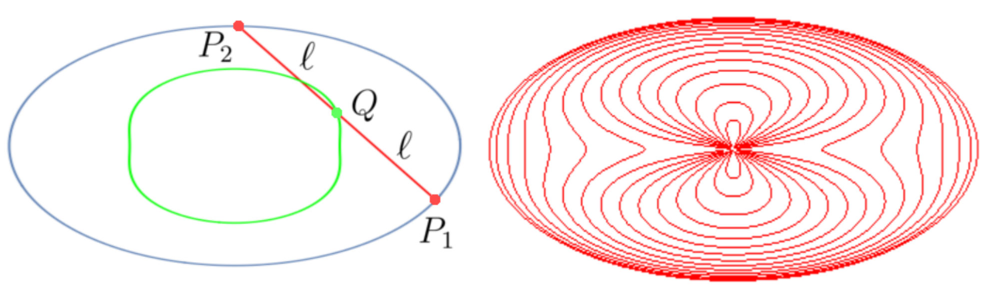
Pour vos calculs, un formulaire de trigonométrie est à votre disposition en fin de sujet.

Première partie : Courbes de Holditch de l'ellipse

Soient $a \geq b > 0$. On note E l'ellipse dont une équation cartésienne est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Deux points quelconques $P_1 = (x_1, y_1)$ et $P_2 = (x_2, y_2)$ de E définissent un segment $[P_1P_2]$ que l'on appelle *une corde de E*. Étant donné $0 < \ell < 1$, on considère l'ensemble des cordes de longueur 2ℓ et on s'intéresse au lieu Γ_ℓ des points milieux $Q = (x, y)$, $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$, de toutes les cordes de longueur 2ℓ. Les ensembles Γ_ℓ sont des cas particuliers de supports de *courbes de Holditch*.



Courbes Γ_ℓ de Holditch de l'ellipse pour différentes valeurs de ℓ.

1) On suppose que $a = b = 1$ autrement dit que E est le cercle C de centre l'origine et de rayon 1.

a) Montrer que $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{QP_1}$ sont orthogonaux.

b) En déduire que Q est dans un cercle de rayon $\sqrt{1-\ell^2}$

c) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x_1 - x = -\alpha y \\ y_1 - y = \alpha x \end{cases}$$

et déterminer α^2.

d) En déduire que Γ_ℓ est le cercle $C(O, \sqrt{1-\ell^2})$ de centre l'origine O et de rayon $\sqrt{1-\ell^2}$.

Rép.– a) On a

$$\langle \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{QP_1} \rangle = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 - x \\ y_1 - y \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 - x_2}{2} \\ \dfrac{y_1 - y_2}{2} \end{pmatrix} \rangle = \frac{1}{4}(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2).$$

Puisque P_1 et P_2 sont des points du cercle unité, on a $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1$ d'où $\langle \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{QP_1} \rangle = 0$.

b) D'après Pythagore $\|\overrightarrow{OQ}\|^2 + \|\overrightarrow{QP_1}\|^2 = 1$ or $\|\overrightarrow{QP_1}\|^2 = \ell^2$ donc $\|\overrightarrow{OQ}\| = \sqrt{1-\ell^2}$.

c) L'existence de α s'obtient en remarquant que $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ est un vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{OQ}$. Ce vecteur est non nul car $0 < \ell < 1$ implique que la norme de $\overrightarrow{OQ}$ est non nulle. Puisque $\|\overrightarrow{QP_1}\|^2 = \ell^2$, on a

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = \ell^2$$

c'est-à-dire

$$\alpha^2 y^2 + \alpha^2 x^2 = \ell^2$$

d'où

$$\alpha^2 = \frac{\ell^2}{1-\ell^2}$$

puisque $x^2 + y^2 = 1 - \ell^2$.

d) La question *b)* montre que $\Gamma_\ell \subset C(O, \sqrt{1-\ell^2})$. Réciproquement, étant donné $Q = (x, y) \in C(O, \sqrt{1-\ell^2})$, les expressions de la question *c)* dictent comment choisir P_1, puis P_2, tous les deux sur le cercle unité et tels que Q soit le point milieu de $[P_1, P_2]$:

$$\begin{cases} x_1 = x - \alpha y \\ y_1 = y + \alpha x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2 = x + \alpha y \\ y_2 = y - \alpha x \end{cases}$$

2) On ne suppose plus désormais que $a = b = 1$. Soit

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (ax, by).$$

Montrer que $\Phi(C) = E$.

Rép.– Notons $X = ax$ et $Y = ay$. On a

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = x^2 + y^2.$$

Par conséquent si $(x, y) \in C$ alors $x^2+y^2 = 1$ et $\Phi(x, y) \in E$ ce qui montre que $\Phi(C) \subset E$. L'application réciproque de Φ est

$$\Phi^{-1} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2, \quad (X, Y) \mapsto (X/a, Y/b)$$

et pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\|\Phi^{-1}(X, Y)\|^2 = \left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2.$$

Par conséquent, si $(X, Y) \in E$, on a $\|\Phi^{-1}(X, Y)\|^2 = 1$ c'est-à-dire $\Phi^{-1}(E) \subset C$. En composant par Φ les deux membres de l'égalité on obtient $E \subset \Phi(C)$. Ceci, combiné à l'inclusion inverse obtenue plus haut, montre que $\Phi(C) = E$.

3) On considère un nouveau produit scalaire, noté $(.|.)$ et défini comme suit

$$(V|W) := \frac{V_1W_1}{a^2} + \frac{V_2W_2}{b^2}$$

pour tout $V = (V_1, V_2)$ et $W = (W_1, W_2)$. Ce produit scalaire coïncide avec le produit scalaire usuel $\langle ., . \rangle$ si $a = b = 1$.

a) Montrer[1] que $(\Phi(V)|\Phi(W)) = \langle V, W \rangle$.

b) Soit $V = (V_1, V_2)$ un vecteur non nul. Montrer que $W = (W_1, W_2)$ est orthogonal à V pour $(.|.)$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$W_1 = -\alpha a^2 V_2 \quad \text{et} \quad W_2 = \alpha b^2 V_1$$

Rép.– a) Il s'agit d'un calcul immédiat

$$(\Phi(V)|\Phi(W)) = \frac{(aV_1)(aW_1)}{a^2} + \frac{(bV_2)(bW_2)}{b^2} = \langle V, W \rangle.$$

b) On vérifie sans peine que si $W = (W_1, W_2)$ satisfait aux expressions proposées alors $(V|W) = 0$. Réciproquement, puisque V est non nul, son orthogonal est de dimension 1. On a donc

$$V^\perp = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -a^2V_2 \\ b^2V_1 \end{pmatrix}.$$

1. On identifie l'application affine Φ avec son application linéaire associée.

4) a) Soient $q = \Phi^{-1}(Q)$, et $p_1 = \Phi^{-1}(P_1)$, $p_2 = \Phi^{-1}(P_2)$. Montrer que q est le point milieu de p_1 et p_2.

b) En utilisant la question 1a), montrer que $\overrightarrow{OQ}$ et $\overrightarrow{QP_1}$ sont orthogonaux pour $(.|.)$.

c) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$x_1 - x = -\alpha a^2 y \quad \text{et} \quad y_1 - y = \alpha b^2 x$$

et montrer que $\alpha^2 = \dfrac{\ell^2}{b^4x^2 + a^4y^2}$.

d) Écrire le théorème de Pythagore pour le produit scalaire $(.|.)$ au triangle (OQP_1) et en déduire que

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(x_1 - x)^2}{a^2} + \frac{(y_1 - y)^2}{b^2}.$$

e) Montrer que si $(x, y) \in \Gamma_\ell$ alors

$$\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) = \frac{\ell^2}{a^2b^2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \quad (Eq.1).$$

Rép.– a) L'application Φ^{-1} est affine, elle conserve les milieux.
b) Notons que l'origine est fixe par Φ et donc $O = \Phi^{-1}(O)$. D'après la question 3, on a

$$(\overrightarrow{OQ}|\overrightarrow{QP_1}) = (\Phi(\overrightarrow{Oq})|\Phi(\overrightarrow{qp_1})) = \langle \overrightarrow{Oq}, \overrightarrow{qp_1} \rangle$$

et d'après la question 1a), $\langle \overrightarrow{Oq}, \overrightarrow{qp_1} \rangle = 0$.
c) Puisque $(\overrightarrow{OQ}|\overrightarrow{QP_1}) = 0$, d'après la question précédente il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$x_1 - x = -\alpha a^2 y \quad \text{et} \quad y_1 - y = \alpha b^2 x.$$

D'autre part, la longueur de $[QP_1]$ vaut ℓ donc

$$\ell^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = (-\alpha a^2 y)^2 + (\alpha b^2 x)^2$$

d'où l'on tire la valeur de α donnée dans l'énoncé.
d) Puisque le triangle (OQP_1) est rectangle en Q pour $(.|.)$ on a

$$(\overrightarrow{OP_1}|\overrightarrow{OP_1}) = (\overrightarrow{OQ}|\overrightarrow{OQ}) + (\overrightarrow{QP_1}|\overrightarrow{QP_1})$$

soit en coordonnées

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(x_1 - x)^2}{a^2} + \frac{(y_1 - y)^2}{b^2}$$

et puisque $P_1 \in E$, le membre de gauche vaut 1.
e) Il suffit de remplacer dans l'égalité ci-dessus les termes $(x_1 - x)^2$ et $(y_1 - y)^2$ par les expressions trouvées à peine plus haut pour obtenir la relation demandée.

Deuxième partie : Le théorème de Holditch pour les ellipses

5) On note (r, θ) avec $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ les coordonnées polaires de (x, y). Montrer que $(x, y) \in E$ si et seulement si

$$r = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}}}$$

Rép.– On a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \frac{r^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\theta}{b^2} = 1 \iff r^2 = \left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)^{-1}$$

6) On considère la paramétrisation polaire de E donnée par

$$\theta \mapsto r(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}}}.$$

avec $\theta \in [0, 2\pi]$.

a) Montrer que l'aire A enclose par E est donnée par

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\theta)^2 d\theta.$$

b) Montrer que, pour tout $\theta \in [0, \pi/2[$, on a

$$r(\theta)^2 = \frac{a^2b^2(1 + \tan^2\theta)}{b^2 + a^2\tan^2\theta}.$$

c) Montrer que

$$A = 2\int_0^{+\infty} \frac{a^2b^2}{b^2 + a^2u^2} du$$

d) En déduire que $A = \pi ab$. On rappelle que

$$\int \frac{c}{c^2 + u^2} du = \arctan\frac{u}{c} + Cte.$$

Rép.– a) Soit $x = r(\theta)\cos\theta$ et $y = r(\theta)\sin\theta$. La formule de Green-Riemann s'écrit

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(xy' - yx')d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta)d\theta.$$

Puisque $r(-\theta) = r(\theta)$ et $r(\pi - \theta) = r(\theta)$, on peut restreindre l'intervalle d'intégration à $[0, \frac{\pi}{2}[$.

b) On a

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2} = \cos^2\theta\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\tan^2\theta}{b^2}\right) = \frac{1}{1+\tan^2\theta}\left(\frac{b^2 + a^2\tan^2\theta}{a^2b^2}\right).$$

c) Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = \tan\theta$.

d) Posons $v = au$. On a

$$A = 2\int_0^{+\infty}\frac{a^2b^2}{b^2+v^2}\frac{dv}{a} = 2\left[ab\arctan\left(\frac{v}{b}\right)\right]_0^{+\infty} = 2ab\frac{\pi}{2} = \pi ab.$$

7) On note A_ℓ l'aire enclose par la courbe Γ_ℓ et on cherche à évaluer la différence $A - A_\ell$. On note $\theta \mapsto \rho(\theta)$ une paramétrisation polaire de Γ_ℓ. On admet [2] que

$$A_\ell = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\rho(\theta)^2 d\theta$$

avec

$$\rho(\theta)^2 = r^2(\theta) - \frac{a^2b^2\ell^2(1+\tan^2\theta)}{b^4 + a^4\tan^2\theta}.$$

Montrer que

$$A - A_\ell = \pi\ell^2.$$

Rép.– On a

$$A - A_\ell = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2b^2\ell^2(1+\tan^2\theta)}{b^4+a^4\tan^2\theta}d\theta = 2\int_0^{+\infty}\frac{a^2b^2\ell^2}{b^4+a^4u^2}du = 2\int_0^{+\infty}\frac{a^2b^2\ell^2}{b^4+v^2}\frac{dv}{a^2}$$

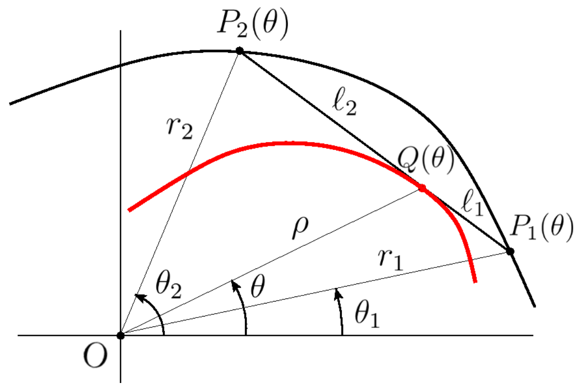
d'où

$$A - A_\ell = 2\left[\ell^2\arctan\left(\frac{v}{b^2}\right)\right]_0^{+\infty} = 2\ell^2\frac{\pi}{2} = \pi\ell^2.$$

Troisième partie : Le théorème de Holditch dans le cas général

2. La paramétrisation polaire ρ s'obtient de la même façon qu'à la question 5) en remplaçant $x = \rho(\theta)\cos\theta$ et $y = \rho(\theta)\sin\theta$ dans l'équation $(Eq.1)$. On vous épargne ce calcul fastidieux.

On considère une courbe paramétrée en polaire $\theta \to r(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, ainsi que deux reparamétrages $r_1 = r \circ \varphi_1$ et $r_2 = r \circ \varphi_2$ avec $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note $P_1(\theta)$ et $P_2(\theta)$ les points de coordonnées polaire $(r_1(\theta), \varphi_1(\theta))$ et $(r_2(\theta), \varphi_2(\theta))$. On suppose que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la longueur de la corde $[P_1(\theta)P_2(\theta)]$ est constante, cette longueur étant notée L.



Dans ce schéma, on a noté θ_1 et θ_2 pour $\varphi_1(\theta)$ et $\varphi_2(\theta)$. Le support de r est en noir, celui de la courbe de Holditch de paramètre ℓ_1 et ℓ_2 est en rouge.

Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux nombres positifs tels que $L = \ell_1 + \ell_2$. On s'intéresse à la courbe du point $Q(\theta) \in [P_1(\theta)P_2(\theta)]$ défini par

$$\|\overrightarrow{P_1(\theta)Q(\theta)}\| = \ell_1 \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{P_2(\theta)Q(\theta)}\| = \ell_2.$$

Cette courbe est appelée la *courbe de Holditch de paramètres ℓ_1 et ℓ_2 de r.*

8) On note $(\rho(\theta), \theta)$ les coordonnées polaires de $Q(\theta)$.

a) En remarquant que $Q(\theta)$ est le barycentre des points $(P_1(\theta), \ell_2/L)$ et $(P_2(\theta), \ell_1/L)$, montrer que

$$L\rho\cos\theta = \ell_2 r_1(\theta)\cos\varphi_1(\theta) + \ell_1 r_2(\theta)\cos\varphi_2(\theta)$$

$$L\rho\sin\theta = \ell_2 r_1(\theta)\sin\varphi_1(\theta) + \ell_1 r_2(\theta)\sin\varphi_2(\theta)$$

b) Montrer que

$$L^2 = r_1^2(\theta) + r_2^2(\theta) - 2r_1(\theta)r_2(\theta)\cos(\varphi_2(\theta) - \varphi_1(\theta)).$$

c) Déduire des deux questions précédentes que

$$\rho^2(\theta) = \frac{\ell_2 r_1^2(\theta) + \ell_1 r_2^2(\theta)}{L} - \ell_1\ell_2.$$

Rép.– a) Puisque $Q(\theta)$ est le barycentre pondéré des points $(P_1(\theta), \ell_2/L)$ et $(P_2(\theta), \ell_1/L)$, on a

$$\frac{\ell_2}{L}\overrightarrow{Q(\theta)P_1(\theta)} + \frac{\ell_1}{L}\overrightarrow{Q(\theta)P_2(\theta)} = \overrightarrow{0}$$

d'où

$$\overrightarrow{OQ(\theta)} = \frac{\ell_2}{L}\overrightarrow{OP_1(\theta)} + \frac{\ell_1}{L}\overrightarrow{OP_2(\theta)}.$$

Puisque $Q(\theta) = (\rho(\theta), \theta)$, $P_1(\theta) = (r_1(\theta), \varphi_1(\theta))$, $P_2(\theta) = (r_2(\theta), \varphi_2(\theta))$, les relations demandées s'en suivent.
b) On a

$$\begin{aligned} L^2 &= \|\overrightarrow{P_1(\theta)P_2(\theta)}\|^2 \\ &= (r_2\cos\varphi_2(\theta) - r_1\cos\varphi_1(\theta))^2 + (r_2\sin\varphi_2(\theta) - r_1\sin\varphi_1(\theta))^2 \\ &= r_1^2(\theta) + r_2^2(\theta) - 2r_1(\theta)r_2(\theta)(\cos\varphi_2(\theta)\cos\varphi_1(\theta) + \sin\varphi_2(\theta)\sin\varphi_1(\theta)) \\ &= r_1^2(\theta) + r_2^2(\theta) - 2r_1(\theta)r_2(\theta)\cos(\varphi_2(\theta) - \varphi_1(\theta)) \end{aligned}$$

c) En passant aux carrés dans les relations du a) et en sommant il vient

$$L^2\rho^2(\theta) = \ell_2^2 r_1^2(\theta) + \ell_1^2 r_2^2(\theta) + \ell_1\ell_2 r_1(\theta)r_2(\theta)\cos(\varphi_2(\theta) - \varphi_1(\theta))$$

D'après le b) on a

$$r_1(\theta)r_2(\theta)\cos(\varphi_2(\theta) - \varphi_1(\theta)) = r_1^2(\theta) + r_2^2(\theta) - L^2$$

d'où

$$\begin{aligned} L^2\rho^2(\theta) &= \ell_2^2 r_1^2(\theta) + \ell_1^1 r_2^2(\theta) + \ell_1\ell_2(r_1^2(\theta) + r_2^2(\theta) - L^2) \\ &= \ell_2(\ell_1 + \ell_2)r_1^2(\theta) + \ell_1(\ell_1 + \ell_2)r_2^2(\theta) - L^2\ell_1\ell_2 \end{aligned}$$

Ainsi

$$L\rho^2(\theta) = \ell_2 r_1^2(\theta) + \ell_1 r_2^2(\theta) - L\ell_1\ell_2.$$

9) On suppose désormais que la courbe polaire $\theta \to r(\theta)$ est 2π-pédiodique et quelle est fermée (i.e. $r(0) = r(2\pi)$) et simple (i.e. r est injective sur $[0, 2\pi[$). Il en est donc de même pour r_1 et r_2.. On note A l'aire enclose par la courbe en polaire $\theta \mapsto r(\theta)$.

a) Montrer que

$$A = \frac{\ell_1}{2L}\int_0^{2\pi} r_1^2(\theta)d\theta + \frac{\ell_2}{2L}\int_0^{2\pi} r_2^2(\theta)d\theta.$$

b) On note A_{ℓ_1,ℓ_2} l'aire enclose par la courbe de Holditch en polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$. Montrer que

$$A - A_{\ell_1,\ell_2} = \pi\ell_1\ell_2$$

Rép.– a) On a

$$A = \frac{\ell_1}{L}A + \frac{\ell_2}{L}A$$

et

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r_1^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r_2^2(\theta)d\theta$$

puisque r_1 et r_2 sont des reparamétrages.
b) On a établi plus haut que

$$\frac{\ell_2 r_1^2(\theta) + \ell_1 r_2^2(\theta)}{L} = \rho^2(\theta) + \ell_1\ell_2.$$

Par conséquent

$$A = \frac{\ell_1}{2L}\int_0^{2\pi} r_1^2(\theta)d\theta + \frac{\ell_2}{2L}\int_0^{2\pi} r_2^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\rho^2(\theta) + \ell_1\ell_2)d\theta = A_{\ell_1,\ell_2} + \pi\ell_1\ell_2.$$

Note culturelle. – Ce dernier résultat constitue le *théorème de Holditch.* Il est remarquable en deux points. Le premier est que la différence d'aire est indépendante de la la courbe de départ. La seconde est que cette différence est précisément l'aire d'une ellipse de demi-axes ℓ_1 et ℓ_2.

Formulaire trigonométrique.–

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}\\
\cos p - \cos q &= -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}\\
\sin p + \sin q &= 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}\\
\sin p - \sin q &= 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}.
\end{aligned}$$