Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie

Corrigé du contrôle continu 2 du 12 octobre 2021

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les téléphones portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Problème. – Dans ce problème on note (e_1, e_2, e_3) la base standard de $\mathbb{R}^3$ et (x, y, z) les coordonnées des points dans cette base.

Ce problème est composé de trois parties relativement indépendantes.

Pour vos calculs, un formulaire de trigonométrie est à votre disposition en fin de sujet.

Première partie : Courbes holonomes

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞. On note $j^n f : [a, b] \to \mathbb{R}^{n+1}$ la courbe paramétrée

$$t \longmapsto (f(t), f'(t), f''(t), ..., f^{(n)}(t)).$$

Une telle courbe est appelée COURBE HOLONOME D'ORDRE n.

1) Montrer que le cercle $C(O, R)$ de centre l'origine et de rayon R est une courbe holonome d'ordre 1, c'est-à-dire qu'il existe f tel que $j^1 f$ soit une paramétrisation de $C(O, R)$.

Rép.– Il suffit de considérer $f(t) = R\cos t$ ou $f(t) = R\sin t$ avec $t \in [0, 2\pi]$.

2) On considère la courbe $j^2 f$ où $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ est la fonction sinus.

a) Montrer que le support de $j^2 f$ est inclus dans le plan affine d'équation $x + z = 0$.

b) Montrer que $\left(\frac{e_1 - e_3}{\sqrt{2}}, e_2\right)$ est une base orthonormée de ce plan.

c) Écrire $j^2 f(t)$ dans cette base et en déduire que le support de $j^2 f$ est une ellipse dont on déterminera une équation cartésienne.

Rép.– a) On a

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\sin t, \cos t, -\sin t)$$

et donc $x(t) + z(t) = 0$.
b) Les coordonnées de $\frac{e_1-e_3}{\sqrt{2}}$ sont $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$ et elles vérifient $x+z=0$. De même les coordonnées de $e_2 = (0,1,0)$ vérifient cette équation. Il est trivial que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants, ainsi $Vect(\frac{e_1-e_3}{\sqrt{2}}, e_2)$ est le plan vectoriel $x+z=0$. Il suffit ensuite de vérifier par un simple calcul que la base est orthonormée.
c) Dans cette base

$$j^2f(t) = (\sqrt{2}\sin t, \cos t)$$

avec $t \in [-\pi, \pi]$. Le support de j^2f est donc une ellipse d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

3) On rappelle qu'une courbe de $\mathbb{R}^3$ est dite PLANAIRE si son support est inclus dans un plan. Montrer que j^2f est une courbe planaire si et seulement si f est solution d'une équation différentielle d'ordre au plus deux et à coefficients constants.

Rép.– Si f satisfait à une équation différentielle d'ordre au plus deux et à coefficients constants, cela signifie qu'il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$af + bf' + cf'' = d.$$

Cette équation montre que le support de j^2f est inclus dans le plan

$$ax + by + cz = d.$$

Réciproquement, si le support de j^2f est inclus dans un plan P et si $ax+by+cz=d$ est une équation cartésienne de ce plan alors on aura pour tout t :

$$af + bf' + cf'' = d.$$

4) On suppose que j^1f est une courbe régulière.
a) Montrer qu'un point où j^1f coupe l'axe (Ox) la tangente est verticale.
b) Montrer que si j^2f est une courbe sans point double alors les points doubles de j^1f sont *transverses* i.e. les deux tangentes en chaque point double ne sont pas confondues.
c) Montrer que si j^2f est une courbe sans point double alors l'axe (Ox) ne contient aucun point double de j^1f.

Rép.– a) La courbe $j^1 f = (f, f')$ est régulière si pour tout t on a

$$(f'(t), f''(t)) \neq (0, 0).$$

La courbe $j^1 f$ coupe l'axe (Ox) en tous les points t tels que $f'(t) = 0$. Le vecteur tangent s'écrira donc sous la forme

$$(j^1 f)'(t) = (0, f''(t)).$$

Puisqu'elle est régulière, ce vecteur est non nul ce qui signifie que $f''(t) \neq 0$ et qu'il pointe dans la direction verticale.
b) Plaçons-nous en un point double de $j^1 f$. Soient $t_1 \neq t_2$ tels que $j^1 f(t_1) = j^1 f(t_2)$. Les tangentes sont dirigées par

$$T_1 = (f'(t_1), f''(t_1)) \quad \text{et} \quad T_1 = (f'(t_2), f''(t_2))$$

avec

$$f(t_1) = f(t_2) \quad \text{et} \quad f'(t_1) = f'(t_2).$$

Puisque $j^2 f$ est sans point double

$$(f(t_1), f'(t_1), f''(t_1)) \neq (f(t_2), f'(t_2), f''(t_2))$$

ce qui implique que $f''(t_1) \neq f''(t_2)$ donc $T_1 \neq T_2$. Comme $j^1 f$ est régulière ces deux vecteurs tangents sont non nuls et dirigent donc deux droites.
c) D'après a) si $j^1 f$ a un point double sur l'axe (Ox) alors les deux tangentes seront verticales donc confondues. Ceci est contradictoire avec b).

5) On considère la forme différentielle $\alpha = ydx$.
a) Montrer que

$$\int_{j^1 f} \alpha > 0$$

pour tout $f \in C^\infty([a, b])$ non constante.
b) Soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $\phi : [c, d] \to [a, b]$ un reparamétrage. Montrer que

$$\int_\gamma \alpha = \epsilon \int_{\gamma \circ \phi} \alpha$$

où $\epsilon = \pm 1$ selon que ϕ est croissante ou décroissante.
c) En déduire que la courbe paramétrée $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$t \longmapsto (\sin t, \sin 2t)$$

n'admet pas de reparamérage ϕ tel que $\gamma \circ \phi$ soit une courbe holomone d'ordre 1.

Rép.– a) On a
$$\int_{j^1 f} \alpha = \int_a^b f'(t)df(t) = \int_a^b [f'(t)]^2 dt > 0.$$
puisque f est non constante et $f \in C^\infty([a,b])$.

b) Notons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et $t = \phi(u)$. On a
$$\int_{\gamma\circ\phi} \alpha = \int_c^d y \circ \phi(u) d(x \circ \phi)(u) = \int_c^d y \circ \phi(u) x'(\phi(u))\phi'(u)du.$$
Rappelons la formule de changement de variables $t = \phi(u)$:
$$\int_a^b F(t)dt = \epsilon \int_c^d F \circ (u)\phi'(u)du$$
avec $\epsilon = \pm$ selon que ϕ est croissant ou décroissant. On a donc ici
$$\int_{\gamma\circ\varphi} \alpha = \epsilon \int_a^b y(t)x'(t)dt = \epsilon \int_\gamma \alpha.$$
c) Calculons l'intégrale de α le long de γ :
$$\int_\gamma \alpha = \int_0^{2\pi} \sin 2t d(\sin t)dt = \int_0^{2\pi} \sin 2t \cos t dt = \int_0^{2\pi} 2\sin t \cos^2 t dt = \left[-\frac{2}{3}\cos^3 t\right]_0^{2\pi} = 0.$$
Supposons que γ admette un reparamétrage φ telle que $j^1 f = \gamma \circ \varphi$. La fonction f ne peut être constante car alors $j^1 f$ serait une courbe constante. D'après les questions précédentes, on devrait avoir
$$\int_\gamma \alpha = \int_{j^1 f} \alpha > 0.$$
Contradiction.

Deuxième partie : Forme de contact et courbes legendriennes

La 1-forme différentielle $\xi = dz - ydx$ est appelé la FORME DE CONTACT STANDARD de $\mathbb{R}^3$. On dit qu'une courbe $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ est LEGENDRIENNE si pour tout $t \in [a,b]$ on a
$$\xi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0.$$
6) a) Montrer qu'en tout point (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ le noyau de ξ est un plan $P(x,y,z)$ dont on déterminera un vecteur normal.

b) Montrer que si γ est une courbe legendrienne régulière alors son vecteur tangent n'est jamais vertical i. e.

$$\forall t \in [a,b], \quad \gamma'(t) \notin Vect(e_3).$$

c) Soit $proj : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la projection $(x,y,z) \mapsto (x,y)$. Montrer que si γ est une courbe legendrienne régulière alors $proj \circ \gamma$ est une courbe plane régulière.

d) On suppose que γ est une courbe legendrienne régulière fermée. Déterminer

$$\int_{proj\circ\gamma} \alpha.$$

Rép.– a) Puisque

$$P(x,y,z) = \ker \xi_{x,y,z} = \ker dz - ydx$$

une équation cartésienne de ce plan est donnée par $Z - yX = 0$. Un vecteur normal est donc $\nu = -ye_1 + e_3$.

b) Dire que γ est legendrienne c'est dire que pour tout t le vecteur $\gamma'(t)$ est orthogonal à $\nu(\gamma(t))$. Or

$$\langle \gamma'(t), \nu(\gamma(t))\rangle = \langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y(t) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = z'(t) - y(t)x'(t)$$

donc γ est legendrienne ssi $z'(t) - y(t)x'(t) = 0$ (on peut aussi arriver directement à cette équation en écrivant $\xi_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$). Supposons qu'en un point $\gamma'(t) = (0,0,z'(t))$ soit verticale. Alors

$$z'(t) - y(t)x'(t) = 0 \quad \Longrightarrow z'(t) = 0.$$

Le vecteur $\gamma'(t)$ doit donc être nul en ce point ce qui est contradictoire avec le caractère régulier de γ.

c) Supposons que $(x'(t), y'(t)) = 0$ alors la condition $z'(t) - y(t)x'(t) = 0$ impliquerait $z'(t) = 0$ et γ ne serait pas régulière en ce point.

d) On a

$$\int_{proj\circ\gamma} \alpha = \int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b z'(t)dt = z(b) - z(a) = 0.$$

Soit γ est une courbe legendrienne régulière et fermée. On définit le NOMBRE DE ROTATION $rot(\gamma)$ de γ comme étant le nombre de rotation de sa projection $proj \circ \gamma$ sur le plan (Oxy).

7) On considère $\gamma' : [a,b] \to \mathbb{R}^3 \setminus (Oz)$ l'indicatrice d'une courbe legendrienne régulière fermée et écrite en coordonnées sphériques :

$$x'(t) = r(t)\sin\theta(t)\cos\varphi(t), y'(t) = r(t)\sin\theta(t)\sin\varphi(t), z'(t) = \cos\theta(t)$$

avec $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\theta : [a,b] \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Montrer que

$$rot(\gamma) = \frac{1}{2\pi}(\varphi(b) - \varphi(a)).$$

Rép.– Par définition, le nombre de rotation de $proj \circ \gamma$ est

$$rot(proj \circ \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Posons $\rho(t) = r(t)\sin\theta(t)$, on a

$$x'(t) = \rho(t)\cos\varphi(t) \quad \text{et} \quad y'(t) = \rho(t)\sin\varphi(t)$$

d'où $x'^2(t) + y'^2(t) = \rho^2(t)$ et

$$\begin{aligned} x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t) &= \rho(t)\cos\varphi(t)\,(\rho'(t)\sin\varphi(t) + \varphi'(t)\rho(t)\cos\varphi(t)) \\ &\quad -\rho(t)\sin\varphi(t)\,(\rho'(t)\cos\varphi(t) - \varphi'(t)\rho(t)\sin\varphi(t)) \\ &= \rho^2(t)\varphi'(t). \end{aligned}$$

Ainsi

$$rot(proj \circ \gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \varphi'(t)dt = \frac{1}{2\pi}(\varphi(b) - \varphi(a)).$$

Troisième partie : Cousin Legendrien d'une courbe holonome

Soit $j^2 f : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ une courbe holonome d'ordre 2. Son cousin legendrien est la courbe paramétrée $\ell : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$t \longmapsto (f(t), 3f'(t)f''(t), f'(t)^3).$$

8) a) Montrer que ℓ est régulière si et seulement si $j^1 f$ est régulière.
b) Montrer que le cousin legendrien ℓ est une courbe legendrienne.

Rép.– a) La dérivée de ℓ a pour expression

$$\ell' = (f', 3f''^2 + 3f'f'', 3f'^2 f'')$$

En un point t où $f'(t) \neq 0$, on a trivialement $\ell'(t) \neq 0$. En un point où $f'(t) = 0$ on a

$$\ell'(t) = (0, 3f''(t)^2, 0).$$

Ainsi

$$\ell'(t) \neq 0 \iff (f'(t), f''(t)) \neq (0,0) \iff (j^1 f)'(t) \neq 0.$$

b) On a

$$\begin{aligned}\xi_{\ell(t)}(\ell'(t)) &= (f'^3)'(t) - 3f'(t)f''(t)f'(t) \\ &= 3f'^2(t)f''(t) - 3f'(t)f''(t)f'(t) = 0.\end{aligned}$$

9) On suppose que $f : [-T/2, T/2] \to \mathbb{R}$ est une fonction impaire T-périodique ($T > 0$). Montrer que le nombre de rotation du cousin legendrien ℓ est nul.

Rép.– Le nombre de rotation de ℓ est donnée par la formule

$$rot(\ell) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

avec

$$x(t) = f(t) \quad \text{et} \quad y(t) = 3f'(t)f''(t).$$

Si f est impaire alors f' est paire, f'' est impaire et par conséquent $f'(t)f''(t)$ est impaire. Il s'en suit que x et y sont toutes les deux impaires, puis que x' et y' sont toutes les deux paires et enfin que x'' et y'' sont impaires. Par conséquent

$$t \longmapsto \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{x'^2(t) + y'^2(t)}$$

est impaire. Le nombre de rotation de ℓ est donc nul.

10) On considère la courbe $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\gamma(t) = (\sin t, -3\sin t\cos t, \cos^3 t).$$

a) Montrer que γ est une courbe legendrienne régulière et fermée.
b) Déterminer son nombre de rotation.

Rép.– a) On constate immédiatement que γ est le cousin legendrien de la courbe holonome $j^2 f$ où $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ est donnée par $f(t) = \sin t$. Il en résulte que γ est legendrienne. Puisque $j^1 f$ est régulière, il en est de même de γ. Enfin, puisque f est 2π-périodique, la courbe γ est fermée.
b) Puisque f est impaire, d'après la question précédente, son nombre de rotation est nul.

11) On considère la légère variation de la courbe γ donnée par

$$\delta(t) = (1 + \sin t, -3\sin t\cos t, \cos^3 t).$$

avec $t \in [-\pi, \pi]$.
a) Montrer que δ est une courbe legendrienne régulière et fermée.

b) Déterminer son nombre de rotation.

Rép.– a) La courbe δ est le cousin legendrien de la courbe holonome $j^2 f$ où$f(t) = 1 + \sin t$. On peut donc répéter les arguments données précédemment.
b) Cette fois, f n'est plus impaire, mais puisque $f'(t) = \cos t$, la dérivée f' est paire. Les arguments utilisées dans la question 9 perdurent et conduisent à un nombre de rotation nul.

NOTE CULTURELLE. – Une courbe fermée simple legendrienne s'appelle un NOEUD LEGENDRIEN. L'étude de tels noeuds est un domaine actif de la recherche actuelle. Les cousins legendriens ont été introduits par les mathématiciennes Joan Birman et Nancy Wrinkle en 1999.

FORMULAIRE TRIGONOMÉTRIQUE.–

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\begin{array}{rcl}
\cos p + \cos q & = & 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\
\cos p - \cos q & = & -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \\
\sin p + \sin q & = & 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\
\sin p - \sin q & = & 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}.
\end{array}$$