Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Géométrie

Corrigé du contrôle final du 10 janvier 2018

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Cinq exercices d'applications directes du cours (2pts chacun). –

Exercice 1. – Soit $\varphi \in]0, \pi[$. On considère la courbe paramétrée suivante, appelée *spirale conique hyperbolique* :

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & (x(t) = \frac{\cos t}{t}, y(t) = \frac{\sin t}{t}, z(t) = \frac{\cot \varphi}{t}) \end{array}$$

1) Montrer que γ est régulière.

Rép.– On a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & -\frac{\sin t}{t} - \frac{\cos t}{t^2} \\ y'(t) & = & \frac{\cos t}{t} - \frac{\sin t}{t^2} \\ z'(t) & = & -\frac{\cot \varphi}{t^2} \end{array} \right.$$

D'où

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{1 + \cot^2 \varphi}{t^4} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{\sin^2 \varphi \, t^4} > 0.$$

Ainsi γ est régulière en tout point.

2) Montrer que le support de γ est inclus dans un cône de révolution C que l'on déterminera.

Rép.– On a $x^2(t) + y^2(t) = \cot^{-2} \varphi \, z^2(t)$. Ainsi le support de γ est inclu dans le cône de révolution C d'équation

$$x^2 + y^2 = \cot^{-2} \varphi \, z^2.$$

Exercice 2. – Soit $a > 0$. On considère la surface paramétrée donnée par

$$\begin{array}{rccl} f : & [0, 2\pi] \times [0, a] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (v \cos u, v \sin u, \frac{v^2}{2}) \end{array}$$

et on note S son support.

1) La surface paramétrée f est-elle régulière ?

Rép.– On a $f_u = (-v\sin u, v\cos u, 0)$ et $f_v = (\cos u, \sin u, v)$, d'où $E = v^2$, $F = 0$ et $G = 1 + v^2$. Ainsi $EG - F^2 = v^2(1 + v^2)$. Par conséquent, f est régulière aux points (u, v) où $v > 0$ et irrégulière aux points $(u, 0)$, $u \in [0, 2\pi]$.

2) Calculer l'aire du support de f

Rép.– On a

$$\begin{aligned}
\text{Aire}\,(f) &= \int_0^{2\pi}\int_0^a v\sqrt{1+v^2}\,dvdu \\
&= 2\pi\int_0^a v\sqrt{1+v^2}\,dv \\
&= \frac{2\pi}{3}\Big[(1+v^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^a \\
&= \frac{2\pi}{3}\Big((1+a^2)^{\frac{3}{2}} - 1\Big).
\end{aligned}$$

Exercice 3.– Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + 3y^2z^2 + x - 1 = 0\}$.
1) Montrer que S est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Rép.– Soit $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x, y, z) = x^3 + 3y^2z^2 + x - 1$. On a

$$\operatorname{grad} F(x, y, z) = (3x^2 + 1, 6yz^2, 6y^2z).$$

Notons que $3x^2 + 1 \geq 1$ et donc $\operatorname{grad} F$ ne s'annule jamais. L'application F est submersion et donc $S = F^{-1}(0)$ est une sous-variété (qui n'est pas vide car $F(-1, 1, 1) = 0$.

2) Donner les coordonnées d'une normale au point $(-1, 1, 1)$.

Rép.– D'après le cours, en tout point (x, y, z) de S le vecteur $\operatorname{grad} F$ est une normale à S au point considéré. Ainsi

$$\operatorname{grad} F(-1, 1, 1) = (4, 6, 6)$$

est un vecteur normal de S en $(-1, 1, 1)$.

Exercice 4.– Soient S le support d'une surface paramétrée régulière et $n : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ une normale unitaire à S. On considère une courbe $\bar{\gamma} : I \longrightarrow S$ tracée sur la surface.
1) En dérivant la fonction $t \mapsto \langle \bar{\gamma}', n \circ \bar{\gamma} \rangle$ montrer que

$$\langle \bar{\gamma}'', n \circ \bar{\gamma} \rangle = II(\bar{\gamma}', \bar{\gamma}')$$

où II est la seconde forme fondamentale de f.
2) On suppose que la courbe $\bar{\gamma}$ est asymptotique. Montrer que la composante normale de $\bar{\gamma}''$ est nulle.

Rép.– 1) La dérivation de $t \mapsto \langle \bar{\gamma}', n \circ \bar{\gamma} \rangle = 0$ donne $\langle \bar{\gamma}'', n \circ \bar{\gamma} \rangle + \langle \bar{\gamma}', dn(\bar{\gamma}') \rangle = 0$, soit encore $\langle \bar{\gamma}'', n \circ \bar{\gamma} \rangle = II(\bar{\gamma}', \bar{\gamma}')$.
2) Par définition, $\bar{\gamma}$ est une ligne asymptotique pour S si $II(\bar{\gamma}', \bar{\gamma}') = \langle \bar{\gamma}', -dn(\bar{\gamma}') \rangle = 0$. On en déduit que $\langle \bar{\gamma}'', n \circ \bar{\gamma} \rangle = 0$ c'est-à-dire que la composante normale de $\bar{\gamma}''$ est nulle.

Exercice 5.– On suppose que les coefficients E et G de la première forme fondamentale d'une paramétrisation $(u, v) \longrightarrow f(u, v)$ vérifient $E(u, v) = 1$, $G(u, v) = 1$.
1) On suppose que $F(u, v) = \varphi(u)$ avec pour tout u, —$|\varphi(u)| < 1$. Montrer que la courbure de Gauss de la surface est nulle.
2) On suppose que $F(u, v) = e^{-(u+v)}$ avec $u > 0$ et $v > 0$. Déterminer la courbure de Gauss et en déduire que la courbure moyenne de la surface ne s'annule jamais.

Rép.– 1) La formule de Brioschi montre directement que

$$K = (1 - F^2)^{-2}(F_{uv}(1 - F^2) + F F_u F_v)$$

ce qui en substituant par $F(u, v) = \varphi(u)$ donne $K = 0$.
2) Notons que $F > 0$ et que $F_u = F_v = -F$, $F_{uv} = F$ d'où $K = F(1 - F^2)^{-1} > 0$. Puisque $H^2 - K \geq 0$, on en déduit $H^2 \geq K > 0$. La courbure moyenne ne s'annule donc jamais.

Problème. – Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation C^∞ régulière d'une sous-variété $S = f(\mathcal{U})$ de $\mathbb{R}^3$ et $N = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}$ une normale unitaire.[1] Le but de ce problème est de découvrir et de prouver les *formules de Minkowski*[2].

1. On note comme toujours f_u pour $\frac{\partial f}{\partial u}$ et f_v pour $\frac{\partial f}{\partial v}$.
2. Ces formules sont la clé de nombreux résultats en théorie des surfaces. Plus d'info dans le tome V du Spivak.

1) On note $O = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ l'origine de $\mathbb{R}^3$. Soit

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p=(u,v) & \longmapsto & -\langle f(u,v), N(u,v)\rangle. \end{array}$$

Montrer que $h(p)$ est au signe près la distance de l'origine O au plan tangent en $f(p)$ de S.
Indication : On pourra projeter le point O sur la droite normale à S en $f(p)$.

Rép.– Soit O' le projeté orthogonal de O sur la droite $N_{f(p)}S = f(p) + \mathrm{Vect}\,(N(p))$. On a d'une part $\mathrm{dist}\,(O, T_{f(p)}S) = \mathrm{dist}\,(O', f(p))$ et d'autre part

$$h(p) = \langle \overrightarrow{f(p)O}, N(p)\rangle = \overline{f(p)O'} = \pm \mathrm{dist}\,(O', f(p)).$$

2) Soit $g : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application C^∞ quelconque et α la 1-forme différentielle de $\mathcal{U}$ définie par

$$\alpha_p(X) = \langle g(p), df_p(X)\rangle$$

où $p \in \mathcal{U}$ et $X \in \mathbb{R}^2$.
i) Écrire α sous la forme $Pdu + Qdv$ et déterminer P et Q.
ii) Montrer que $d\alpha = (\langle g_u, f_v\rangle - \langle g_v, f_u\rangle) du \wedge dv$.
iii) En déduire que pour tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ on a

$$d\alpha(X,Y) = \langle dg(X), df(Y)\rangle - \langle dg(Y), df(X)\rangle$$

Indication (valable également pour le reste des questions) : Il suffit de le montrer[3] pour $(X,Y) = (e_u, e_u), (e_u, e_v)$ et (e_v, e_v).

Rép.– i) On a $P = \alpha(e_u) = \langle g(p), df_p(e_u)\rangle = \langle g(p), f_u(p)\rangle$ et de façon analogue $Q = \alpha(e_v) = \langle g(p), f_v(p)\rangle$ d'où

$$\alpha_p = \langle g(p), f_u(p)\rangle du + \langle g(p), f_v(p)\rangle dv.$$

ii) On a

$$\begin{aligned} d\alpha &= (Q_u - P_v) du \wedge dv \\ &= (\langle g_u, f_v\rangle + \langle g, f_{vu}\rangle - \langle g_v, f_u\rangle - \langle g, f_{uv}\rangle) du \wedge dv \\ &= (\langle g_u, f_v\rangle - \langle g_v, f_u\rangle) du \wedge dv. \end{aligned}$$

3. Comme d'habitude $e_u = (1,0)$ et $e_v = (0,1)$.

iii) Notons ω la 2-forme différentielle définie par $\omega(X,Y) := \langle dg(X), df(Y)\rangle - \langle dg(Y), df(X)\rangle$ pour tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Il est immédiat que $\omega(e_u, e_u) = 0 = d\alpha(e_u, e_u)$ puis que $\omega(e_v, e_v) = 0 = d\alpha(e_v, e_v)$. Enfin

$$\begin{array}{rcl} \omega(e_u, e_v) & = & \langle dg(e_u), df(e_v)\rangle - \langle dg(e_v), df(e_u)\rangle \\ & = & \langle g_u, f_v\rangle - \langle g_v, f_u\rangle \end{array}$$

et d'après la question ii)

$$\begin{array}{rcl} d\alpha(e_u, e_v) & = & (\langle g_u, f_v\rangle - \langle g_v, f_u\rangle) du \wedge dv(e_u, e_v) \\ & = & \langle g_u, f_v\rangle - \langle g_v, f_u\rangle \end{array}$$

ce qui conclut.

3) On note E, F et G les coefficients de la première forme fondamentale de f dans la base (f_u, f_v) et $dS = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv$ la 2-forme d'aire de f. Soit ω^0 la 2-forme différentielle sur $\mathcal{U}$ définie par

$$\omega^0_p(X,Y) = \langle df_p(X) \wedge df_p(Y), N(p)\rangle$$

pour tout $p \in \mathcal{U}$ et tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Montrer que $\omega^0 = dS$ (on rappelle que d'après le cours $\|df_p(e_u) \wedge df_p(e_v)\| = \sqrt{EG - F^2}$).

Rép.– Il suffit d'évaluer ω^0_p sur (e_u, e_v). On a

$$\begin{array}{rcl} \omega^0_p(e_u, e_v) & = & \langle df_p(e_u) \wedge df_p(e_v), N(p)\rangle \\ & = & \langle \|df_p(e_u) \wedge df_p(e_v)\| N(p), N(p)\rangle \\ & = & \|df_p(e_u) \wedge df_p(e_v)\| \end{array}$$

Or (cf. le cours), $\|df_p(e_u) \wedge df_p(e_v)\| = \sqrt{EG - F^2}$.

4) Soit ω^1 la 2-forme différentielle sur $\mathcal{U}$ définie par

$$\omega^1_p(X,Y) = \langle df_p(X) \wedge dN_p(Y) - df_p(Y) \wedge dN_p(X), N(p)\rangle$$

pour tout $p \in \mathcal{U}$ et tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Montrer que $\omega^1 = -2H\omega^0$ où H est la courbure moyenne de f et en déduire que $\omega^1 = -2HdS$.
Indication : On rappelle que $N_u = -a_{11} f_u - a_{21} f_v$ et $N_v = -a_{12} f_u - a_{22} f_v$ où les coefficients a_{ij} sont ceux de la matrice de l'opérateur de Weingarten dans la base (f_u, f_v).

Rép.– Il suffit d'évaluer ω^1_p sur (e_u, e_v). On a d'une part

$$\begin{array}{rcl} \omega^1_p(e_u, e_v) & = & \langle df_p(e_u) \wedge dN_p(e_v) - df_p(e_v) \wedge dN_p(e_u), N(p)\rangle \\ & = & \langle f_u(p) \wedge N_v(p) - f_v(p) \wedge N_u(p), N(p)\rangle. \end{array}$$

D'autre part, la matrice de l'opérateur de Weingarten $W_p = -dN_p$ dans la base (f_u, f_v) est notée

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dans le cours. On a donc aussi

$$\begin{array}{rcl} N_u & = & -a_{11}f_u - a_{21}f_v \\ N_v & = & -a_{12}f_u - a_{22}f_v \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} f_u \wedge N_v - f_v \wedge N_u & = & f_u \wedge (-a_{12}f_u - a_{22}f_v) - f_v \wedge (-a_{11}f_u - a_{21}f_v) \\ & = & -a_{22}f_u \wedge f_v + a_{11}f_v \wedge f_u \\ & = & -(a_{11} + a_{22})f_u \wedge f_v \\ & = & -2Hf_u \wedge f_v \end{array}$$

Finalement

$$\omega^1(e_u, e_v) = -2H\langle f_u \wedge f_v, N\rangle = -2Hw^0(e_u, e_v).$$

Ainsi $\omega^1 = -2H\omega^0$ et puisque $\omega^0 = dS$ d'après la question précédente, on en déduit $\omega^1 = -2HdS$.

5) On s'intéresse de nouveau à la 1-forme différentielle α de la question 2 mais on particularise l'application g en choisissant $g = f \wedge N$. Ainsi pour tout $p \in \mathcal{U}$, tout $X \in \mathbb{R}^2$, la 1-forme α s'écrit maintenant

$$\alpha_p(X) = \langle f(p) \wedge N(p), df_p(X)\rangle.$$

Montrer que $d\alpha = -2\omega^0 - \omega^1$ et en déduire que $d\alpha = -2dS + 2hHdS$.
Pour les calculs, on rappelle que $\langle a, b \wedge c\rangle = \langle b, c \wedge a\rangle$.

Rép.– D'après la question 2, on a

$$\begin{array}{rcl} d\alpha(X,Y) & = & \langle dg(X), df(Y)\rangle - \langle dg(Y), df(X)\rangle \\ & = & \langle df(X) \wedge N, df(Y)\rangle + \langle f \wedge dN(X), df(Y)\rangle \\ & & -\langle df(Y) \wedge N, df(X)\rangle - \langle f \wedge dN(Y), df(X)\rangle \\ & = & \langle df(Y) \wedge df(X), N\rangle + \langle dN(X) \wedge df(Y), f\rangle \\ & & -\langle df(X) \wedge df(Y), N\rangle - \langle dN(Y) \wedge df(X), f\rangle \\ & = & -2\omega^0(X,Y) - \omega^1(X,Y) \end{array}$$

On suppose désormais que $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ est bijective sauf peut-être sur un sous-ensemble de mesure nulle. On suppose en outre que S est compacte sans bord ($\partial S = \emptyset$).

6) Soit $n : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application qui factorise N au dessus de $\mathcal{U}$ c'est-à-dire telle que $N(p) = n \circ f(p)$ pour tout $p \in \mathcal{U}$. On considère la 1-forme différentielle de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\beta_x(V) = \langle x \wedge n(x), V \rangle$$

pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et tout $V \in \mathbb{R}^3$.
i) Montrer que $f^*\beta = \alpha$ où $\alpha = \langle f \wedge N, df \rangle$ (question 5).
ii) En écrivant la formule de Stokes sur S avec $d\beta$, montrer que

$$\text{Aire}\,(S) = \int_{\mathcal{U}} hH dS$$

C'est la *première formule de Minkowski*.

Rép.– i) Par définition du tiré en arrière :

$$\begin{array}{rcl} (f^*\beta)_p(X) & = & \beta_{f(p)}(df_p(X)) \\ & = & \langle f(p) \wedge n(f(p)), df_p(X) \rangle \\ & = & \langle f(p) \wedge N(p), df_p(X) \rangle \\ & = & \alpha_p(X). \end{array}$$

ii) Puisque S est orientée, compacte sans bord le théorème de Stokes s'applique :

$$\int_S d\beta = \int_{\partial S} \beta = 0.$$

Puis, comme $f^*\beta = \alpha$, on a aussi $f^*(d\beta) = d\alpha$ et

$$\int_S d\beta = \int_{f(\mathcal{U})} d\beta = \int_{\mathcal{U}} f^*(d\beta) = \int_{\mathcal{U}} d\alpha$$

et par conséquent

$$\int_{\mathcal{U}} d\alpha = 0.$$

D'après la question précédente, $d\alpha = -2dS + 2hHdS$. Par conséquent

$$\int_{\mathcal{U}} dS = \int_{\mathcal{U}} hH dS$$

et puisque $\text{Aire}\,(S) = \text{Aire}\,(f(\mathcal{U})) = \int_{\mathcal{U}} dS$ c'est donc que $\text{Aire}\,(S) = \int_{\mathcal{U}} hHdS$.

7) Soient ω^2 et ω^3 les deux 2-formes différentielles sur $\mathcal{U}$ définies par

$$\omega^2_p(X, Y) = \langle dN_p(X) \wedge dN_p(Y), N(p) \rangle$$

et

$$\omega_p^3(X,Y) = \langle dN_p(X) \wedge dN_p(Y), f(p) \rangle$$

pour tout $p \in \mathcal{U}$ et tout $(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.
i) Montrer que $\omega^2 = K\omega^0$ où K est la courbure de Gauss de f et en déduire que $\omega^2 = KdS$.
ii) Montrer que $\omega^3 = -KhdS$.

Rép.– i) Il suffit d'évaluer ω_p^2 sur (e_u, e_v). On a d'une part

$$\begin{array}{rcl} \omega^2(e_u,e_v) & = & \langle dN(e_u) \wedge dN(e_v), N \rangle \\ & = & \langle N_u \wedge N_v, N \rangle \\ & = & \langle (-a_{11}f_u - a_{21}f_v) \wedge (-a_{12}f_u - a_{22}f_v), N \rangle \\ & = & \langle (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) f_u \wedge f_v, N \rangle \\ & = & K\omega^0(e_u,e_v) \end{array}$$

Ainsi $\omega^2 = K\omega^0$ et puisque $\omega^0 = dS$ d'après une question précédente, on en déduit $\omega^2 = KdS$.
ii) On a

$$\begin{array}{rcl} \omega^3(e_u,e_v) & = & \langle N_u \wedge N_v, f \rangle \\ & = & K\langle f_u \wedge f_v, f \rangle \\ & = & K\langle \|f_u \wedge f_v\| N, f \rangle \\ & = & K\sqrt{EG-F^2}\langle N, f \rangle \\ & = & -Kh\sqrt{EG-F^2} \\ & = & -Kh\, dS(e_u,e_v) \end{array}$$

ce qui conclut.

8) Soit λ la 1-forme de $\mathcal{U}$ définie par

$$\lambda_p(X) = \langle f(p) \wedge N(p), dN_p(X) \rangle$$

pour tout $p \in \mathcal{U}$ et tout $X \in \mathbb{R}^2$.
i) Montrer que $d\lambda = 2HdS - 2hKdS$.
ii) Montrer que $f^*\mu = \lambda$ où μ est la 1-forme différentielle de $\mathbb{R}^3$ définie par $\mu_x(V) = \langle x \wedge n, dn_x(V) \rangle$, $x \in \mathbb{R}^3$, $V \in \mathbb{R}^3$.
iii) Montrer que

$$\int_{\mathcal{U}} HdS = \int_{\mathcal{U}} hKdS.$$

C'est la *seconde formule de Minkowski*.

Rép.– i) La 1-forme λ s'obtient à partir de la 1-forme α de la question 2 en substituant g par $f \wedge N$ et dN par df. Un simple jeu d'écriture montre donc que

$$d\lambda(X,Y) = \langle d(f \wedge N)(X), dN(Y)\rangle - \langle d(f \wedge N)(Y), dN(X)\rangle$$

d'où

$$\begin{aligned}
d\lambda(X,Y) &= \langle df(X) \wedge N, dN(Y)\rangle + \langle f \wedge dN(X), dN(Y)\rangle \\
&\quad -\langle df(Y) \wedge N, dN(X)\rangle - \langle f \wedge dN(Y), dN(X)\rangle \\
&= \langle dN(Y) \wedge df(X), N\rangle + \langle dN(X) \wedge dN(Y), f\rangle \\
&\quad -\langle dN(X) \wedge df(Y), N\rangle - \langle dN(Y) \wedge dN(X), f\rangle \\
&= -\langle df(X) \wedge dN(Y), N\rangle + 2\langle dN(X) \wedge dN(Y), f\rangle \\
&\quad +\langle df(Y) \wedge dN(X), N\rangle \\
&= -\omega^1(X,Y) + 2\omega^3(X,Y) \\
&= 2HdS - 2hKdS
\end{aligned}$$

ii) On a

$$\begin{aligned}
(f^*\mu)_p(X) &= \mu_{f(p)}(df_p(X)) \\
&= \langle f(p) \wedge n(f(p)), dn_{f(p)}(df_p(X))\rangle \\
&= \langle f(p) \wedge N(p), dN_p(X)\rangle \\
&= \lambda_p(X).
\end{aligned}$$

iii) Pour les mêmes raisons que celles exposées en question 6, on a par application du théorème de Stokes

$$\int_S d\mu = \int_{\mathcal{U}} d\lambda = 0.$$

L'expression obtenue en i) pour $d\lambda$ permet de conclure.