

Université Claude Bernard Lyon 1
M1G – Géométrie
Contrôle final du mercredi 8 janvier 2020

Les documents sont autorisés mais les calculatrices et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

L'examen est composé d'un seul problème ayant trois parties relativement indépendantes

PREMIÈRE PARTIE : INVERSIONS DANS LE PLAN. – On identifie \mathbb{R}^2 et \mathbb{C} et on considère l'inversion de centre l'origine O et de rapport $c > 0$:

$$\begin{aligned} \text{inv} : \mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ z &\longmapsto \frac{c}{\bar{z}} \end{aligned}$$

- 1) i) Montrer que $\text{inv} \circ \text{inv} = \text{id}$ et en déduire que inv est bijective.
- ii) Montrer que l'ensemble des points fixes de inv est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
- iii) Montrer que l'image par inv du cercle $C(O, r)$ de centre O et de rayon r est incluse dans le cercle $C(O, \frac{c}{r})$.
- iv) Montrer que $\text{inv}(C(O, r)) = C(O, \frac{c}{r})$.

2) Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ un réel différent de $|z_0|$. On considère le cercle $C(z_0, r)$ d'équation

$$(z - z_0)(\overline{z - z_0}) = r^2.$$

Montrer que l'image par inv de $C(z_0, r)$ est un cercle $C(z_*, r_*)$ de centre $z_* = \frac{c\bar{z}_0}{|z_0|^2 - r^2}$ et de rayon $r_* = \frac{cr}{||z_0|^2 - r^2|}$. *Suggestion* : Poser $z = \frac{c}{w}$ où $w = \text{inv}(z)$.

- 3) Soient $\alpha > 0$ et $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la courbe paramétrée donnée par $\gamma(t) = \sqrt{c} e^{(\alpha+i)t}$.
 - i) Reconnaître γ et dessiner son support.
 - ii) Montrer que le support de γ et le support de $\text{inv} \circ \gamma$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

SECONDE PARTIE : INVERSION DANS L'ESPACE.— Dans l'espace, on note Inv l'inversion de centre l'origine O et de rapport $c > 0$:

$$Inv : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \frac{c}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Soit $P = \{x_3 = 1\}$ le plan horizontal d'altitude 1 et $(u, v) \mapsto (u, v, 1)$ une paramétrisation de P . On considère la surface paramétrée

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto Inv \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix}$$

4) i) Montrer que la matrice de la première forme fondamentale de g dans la base $(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v})$ est de la forme $\lambda^2(u, v)Id$ où $\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une fonction que l'on déterminera.

ii) En déduire que g est régulière.

iii) Soit $p = (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que si W_1 et W_2 sont deux vecteurs de \mathbb{R}^2 alors

$$\frac{\langle dg_p(W_1), dg_p(W_2) \rangle}{\|dg_p(W_1)\| \|dg_p(W_2)\|} = \frac{\langle W_1, W_2 \rangle}{\|W_1\| \|W_2\|}.$$

5) i) On note Ω le point de coordonnées $(0, 0, \frac{c}{2})$. Montrer que pour tout (u, v) on a

$$\|\overrightarrow{\Omega g(u, v)}\| = \frac{c}{2}.$$

ii) Que peut-on dire du support $g(\mathbb{R}^2)$? En déduire la courbure de Gauss K et la courbure moyenne H de g .

6) Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe de la question 3)

$$t \longmapsto (\sqrt{c}e^{\alpha t} \cos t, \sqrt{c}e^{\alpha t} \sin t)$$

Pour tout $u \in [0, 2\pi[$, on considère la courbe $\sigma_u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$t \mapsto (t \cos u, t \sin u).$$

i) On note R_u le support de σ_u . Quelle est la nature de R_u ?

ii) Soit

$$\mathcal{T} = \{(t_1, t_2, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\mid \exists k \in \mathbb{Z}, t_1 = u + 2k\pi, t_2 = \sqrt{c}e^{\alpha t_1}\}.$$

Montrer que $\gamma(t_1) = \sigma_u(t_2) \iff (t_1, t_2, u) \in \mathcal{T}$.

iii) Montrer que $\langle \frac{\gamma'(t_1)}{\|\gamma'(t_1)\|}, \sigma'_u(t_2) \rangle$ ne dépend pas du triplet $(t_1, t_2, u) \in \mathcal{T}$.

iv) Que vaut le cosinus de l'angle entre $(g \circ \gamma)'(t_1)$ et $(g \circ \sigma_u)'(t_2)$ pour

$(t_1, t_2, u) \in \mathcal{T}$. Justifier.

TROISIÈME PARTIE : ÉNERGIE DE WILLMORE.— Soient $0 < b < a$.
On considère la paramétrisation

$$f : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \longmapsto & ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u) \end{array}$$

et on note $T(a, b)$ son support.

7) i) Soit R_θ la rotation d'angle θ par rapport à l'axe (Oz) . Montrer que le support $T(a, b)$ est stable par R_θ i. e. $R_\theta(T(a, b)) \subset T(a, b)$.

ii) Faire un dessin du support $T(a, b)$.

8) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 . Pour tout $\theta \in [0, \pi[$, on note e_θ le vecteur $e_\theta = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$. On considère le plan Π_θ passant par l'origine et engendré par (e_θ, e_3) .

i) Montrer que $(Oz) \cap T(a, b) = \emptyset$.

ii) Montrer que $T(a, b) \cap \Pi_\theta$ est l'union de deux cercles symétriques par rapport à la droite (Oz) .

9) i) Montrer que l'élément d'aire de f vaut

$$dS = b(a + b \cos u) du dv.$$

ii) En déduire que f est régulière.

iii) Déterminer l'aire de f .

10) i) Sachant que la matrice dans la base (f_u, f_v) de l'opérateur de Weingarten de f est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{a + b \cos u} \end{pmatrix}$$

montrer que

$$H^2 dS = \left(\cos u + \frac{a^2}{4b(a + b \cos u)} \right) du dv$$

où H est la courbure moyenne de f .

ii) En déduire que

$$\int_{T(a,b)} H^2 dS = \frac{\pi^2 a^2}{b\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Cette intégrale s'appelle *l'énergie de Willmore* de $T(a, b)$. On admettra pour le calcul que l'on a pour tout $\mu > 1$:

$$\int_0^\pi \frac{1}{\mu + \cos u} du = \frac{\pi}{\sqrt{\mu^2 - 1}}.$$

iii) Montrer que pour tout $\lambda > 1$, on a

$$\frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \geq 2$$

et en déduire que

$$\int_{T(a,b)} H^2 dS \geq 2\pi^2$$

avec égalité si et seulement si $a/b = \sqrt{2}$.

11) On considère la surface paramétrée $Inv \circ f$.

i) Montrer, en utilisant la question 2, que le support de $Inv \circ f$ est un tore $T(a^*, b^*)$ et déterminer a^* et b^* .

ii) Montrer que

$$\int_{T(a^*, b^*)} H^2 dS = \int_{T(a, b)} H^2 dS.$$