Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Géométrie

Corrigé du contrôle final du mercredi 8 janvier 2020

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

L'examen est composé d'un seul problème ayant trois parties relativement indépendantes

PREMIÈRE PARTIE : INVERSIONS DANS LE PLAN.– On identifie $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ et on considère l'inversion de centre l'origine O et de rapport $c > 0$:

$$\begin{array}{rccc} inv : & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & z & \longmapsto & \dfrac{c}{\overline{z}} \end{array}$$

1) i) Montrer que $inv \circ inv = id$ et en déduire que inv est bijective.
ii) Montrer que l'ensemble des points fixes de inv est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
iii) Montrer que l'image par inv du cercle $C(O, r)$ de centre O et de rayon r est incluse dans le cercle $C(O, \frac{c}{r})$.
iv) Montrer que $inv(C(O, r)) = C(O, \frac{c}{r})$.

Rép.– i) Un calcul direct montre que $inv \circ inv = id$. Ainsi inv est inversible, d'inverse elle-même. C'est une involution.
ii) On a

$$inv(z) = z \iff k = z\overline{z} \iff |z|^2 = c$$

Ainsi l'ensemble des points fixe de inv est un cercle de centre l'origine O et de rayon $\sqrt{c}$.
iii) Notons que $\overline{z} = \frac{k}{inv(z)}$. On a donc

$$z \in C(O, r) \iff |z| = r \iff |\overline{z}| = r \iff \left| \frac{k}{inv(z)} \right| = r \iff |inv(z)| = \frac{c}{r}$$

d'où $z \in C(O, r) \iff inv(z) \in C(O, \frac{c}{r})$ et donc $inv(C(O, r)) \subset C(O, \frac{c}{r})$.
iv) L'inclusion démontrée à la question précédente est vraie pour tout rayon r. En choisissant un rayon égal à $\frac{c}{r}$, on déduit

$$inv(C(O, \frac{c}{r})) \subset C\left(O, \frac{c}{(\frac{c}{r})}\right) = C(O, r).$$

En composant par inv on obtient

$$inv \circ inv(C(O, \frac{c}{r})) \subset inv(C(O, r))$$

i.e. $C(O,\frac{c}{r}) \subset inv(C(O,r))$ puisque $inv \circ inv = id$.

2) Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$ un réel différent de $|z_0|$. On considère le cercle $C(z_0,r)$ d'équation

$$(z-z_0)\overline{(z-z_0)} = r^2.$$

Montrer que l'image par inv de $C(z_0,r)$ est un cercle $C(z_*,r_*)$ de centre $z_* = \frac{c\overline{z}_0}{|z_0|^2-r^2}$ et de rayon $r_* = \frac{cr}{||z_0|^2-r^2|}$. *Suggestion :* Poser $z = \frac{c}{\overline{w}}$ où $w = inv(z)$.

Rép.– On a

$$\begin{aligned}
z \in C(z_0,r) &\iff (z-z_0)\overline{(z-z_0)} = r^2 \\
&\iff (\frac{c}{\overline{w}}-z_0)\overline{(\frac{c}{\overline{w}}-z_0)} = r^2 \\
&\iff \frac{c^2}{w\overline{w}} - c\left(\frac{z_0}{\overline{w}}+\frac{\overline{z_0}}{w}\right) = r^2-|z_0|^2 \\
&\iff c^2 - c(z_0w+\overline{z}_0\overline{w}) = (r^2-|z_0|^2)w\overline{w} \\
&\iff \frac{c^2}{r^2-|z_0|^2} = w\overline{w} + \frac{c}{r^2-|z_0|^2}(z_0w+\overline{z}_0\overline{w}) \\
&\iff \frac{c^2}{r^2-|z_0|^2} = \left(w+\frac{c\overline{z}_0}{r^2-|z_0|^2}\right)\left(\overline{w}+\frac{cz_0}{r^2-|z_0|^2}\right) - \frac{c^2|z_0|^2}{(r^2-|z_0|^2)^2} \\
&\iff \frac{c^2}{r^2-|z_0|^2} + \frac{c^2|z_0|^2}{(r^2-|z_0|^2)^2} = \left(w+\frac{c\overline{z}_0}{r^2-|z_0|^2}\right)\left(\overline{w}+\frac{cz_0}{r^2-|z_0|^2}\right) \\
&\iff \frac{c^2r^2}{(r^2-|z_0|^2)^2} = \left(w-\frac{c\overline{z}_0}{|z_0|^2-r^2}\right)\left(\overline{w}-\frac{cz_0}{|z_0|^2-r^2}\right) \\
&\iff w \in C(z_*,r_*)
\end{aligned}$$

3) Soient $\alpha > 0$ et $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la courbe paramétrée donnée par $\gamma(t) = \sqrt{c}\, e^{(\alpha+i)t}$.
i) Reconnaître γ et dessiner son support.
ii) Montrer que le support de γ et le support de $inv\circ\gamma$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Rép.– i) La courbe γ est une spirale logarithmique.
ii) On a

$$inv(\gamma(t)) = \frac{c}{\sqrt{c}e^{(\alpha+i)t}} = \frac{\sqrt{c}}{e^{\alpha t}e^{-it}} = \sqrt{c}\, e^{-\alpha t}e^{it}$$

Notons S la réflexion par rapport à l'axe des abscisses, i. e. $S(z) = \overline{z}$. On a alors

$$S(inv\circ\gamma(t)) = \sqrt{c}e^{-(\alpha+i)t} = \gamma(-t).$$

Ceci montre que le support de γ et celui de $inv\circ\gamma$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

Seconde partie : inversion dans l'espace.– Dans l'espace, on note Inv l'inversion de centre l'origine O et de rapport $c > 0$:

$$\begin{array}{rccc} Inv: & \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{c}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Soit $P = \{x_3 = 1\}$ le plan horizontal d'altitude 1 et $(u, v) \mapsto (u, v, 1)$ une paramétrisation de P. On considère la surface paramétrée

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \longmapsto & Inv \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

4) i) Montrer que la matrice de la première forme fondamentale de g dans la base $(\frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial v})$ est de la forme $\lambda^2(u, v)Id$ où $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+^*$ est une fonction que l'on déterminera.
ii) En déduire que g est régulière.
iii) Soit $p = (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que si W_1 et W_2 sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ alors

$$\frac{\langle dg_p(W_1), dg_p(W_2)\rangle}{\|dg_p(W_1)\|\|dg_p(W_2)\|} = \frac{\langle W_1, W_2\rangle}{\|W_1\|\|W_2\|}.$$

Rép.– i) On a

$$g(u,v) = \left(\frac{cu}{1+u^2+v^2}, \frac{cv}{1+u^2+v^2}, \frac{c}{1+u^2+v^2}\right)$$

d'où

$$g_u = \left(c\frac{1-u^2+v^2}{(1+u^2+v^2)^2}, c\frac{-2uv}{(1+u^2+v^2)^2}, c\frac{-2u}{(1+u^2+v^2)^2}\right)$$

$$g_v = \left(c\frac{-2uv}{(1+u^2+v^2)^2}, c\frac{1+u^2-v^2}{(1+u^2+v^2)^2}, c\frac{-2v}{(1+u^2+v^2)^2}\right)$$

et

$$E = \|g_u\|^2 = \frac{c^2(1+u^2+v^2)^2}{(1+u^2+v^2)^4} = \frac{c^2}{(1+u^2+v^2)^2},$$

$$F = 0, \quad \text{et} \quad G = \|g_v\|^2 = \frac{c^2}{(1+u^2+v^2)^2}.$$

D'où $I_g = \lambda^2(u, v)Id$ avec $\lambda(u, v) = \frac{c}{1+u^2+v^2}$.
ii) On a $EG - F^2 = \lambda^4$ et la fonction λ ne s'annule jamais. Ainsi g est régulière.
iii) Par définition de la première forme fondamentale I_g de g on a

$$I_g(W_1, W_2) = \langle dg_p(W_1), dg_p(W_2)\rangle$$

En particulier

$$\|dg_p(W_1)\| = \sqrt{I_g(W_1, W_1)} \quad \text{et} \quad \|dg_p(W_1)\| = \sqrt{I_g(W_1, W_1)}.$$

Or d'après le calcul effectué en i) on a

$$I_g(W_1, W_2) = \lambda(p)^2 \langle W_1, W_2 \rangle$$

d'où

$$\frac{\langle dg_p(W_1), dg_p(W_2) \rangle}{\|dg_p(W_1)\| \|dg_p(W_2)\|} = \frac{\lambda(p)^2 \langle W_1, W_2 \rangle}{\lambda(p)\|W_1\| \lambda(p)\|W_2\|} = \frac{\langle W_1, W_2 \rangle}{\|W_1\| \|W_2\|}.$$

5) i) On note Ω le point de coordonnées $(0, 0, \frac{c}{2})$. Montrer que pour tout (u, v) on a

$$\|\overrightarrow{\Omega g(u,v)}\| = \frac{c}{2}.$$

ii) Que peut-on dire du support $g(\mathbb{R}^2)$? En déduire la courbure de Gauss K et la courbure moyenne H de g.

Rép.– i) On a

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{\Omega g(u,v)}\|^2 &= \left(\frac{cu}{1+u^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{cv}{1+u^2+v^2}\right)^2 + \left(\frac{c - \frac{c}{2}(1+u^2+v^2)}{1+u^2+v^2}\right)^2 \\
&= \frac{c^2u^2 + c^2v^2 + c^2 + \frac{c^2}{4}(1+u^2+v^2)^2 - c^2(1+u^2+v^2)}{(1+u^2+v^2)^2} \\
&= \frac{c^2}{4}
\end{aligned}$$

ii) Ainsi l'image $g(P)$ est incluse dans une sphère de centre Ω et de rayon $\frac{c}{2}$. La courbure de Gauss de g est donc constante égale à $\frac{4}{c^2}$ et la courbure moyenne H constante égale à $\frac{2}{c}$.

6) Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe de la question 3)

$$t \longmapsto (\sqrt{c}e^{\alpha t}\cos t, \sqrt{c}e^{\alpha t}\sin t)$$

Pour tout $u \in [0, 2\pi[$, on considère la courbe $\sigma_u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$t \mapsto (t\cos u, t\sin u).$$

i) On note R_u le support de σ_u. Quelle est la nature de R_u ?
ii) Soit

$$\mathcal{T} = \{(t_1, t_2, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\,|\, \exists k \in \mathbb{Z},\ t_1 = u + 2k\pi, t_2 = \sqrt{c}e^{\alpha t_1}\}.$$

Montrer que $\gamma(t_1) = \sigma_u(t_2) \iff (t_1, t_2, u) \in \mathcal{T}$.
iii) Montrer que $\left\langle \frac{\gamma'(t_1)}{\|\gamma'(t_1)\|}, \sigma_u'(t_2) \right\rangle$ ne dépend pas du triplet $(t_1, t_2, u) \in \mathcal{T}$.
iv) Que vaut le cosinus de l'angle entre $(g \circ \gamma)'(t_1)$ et $(g \circ \sigma_u)'(t_2)$ pour $(t_1, t_2, u) \in \mathcal{T}$. Justifier.

Rép.– i) R_u est un rayon issu de $O = (0, 0)$ et de direction $(\cos u, \sin u)$.
ii) On a

$$\gamma(t_1) = \sqrt{c}e^{\alpha t_1}(\cos t_1, \sin t_1) \quad \text{et} \quad \sigma_u(t_2) = t_2(\cos u, \sin u).$$

D'où $\gamma(t_1)=\sigma_u(t_2) \iff (t_1,t_2,u)\in\mathcal{T}$.
iii) On a
$$\gamma'(t)=\sqrt{c}e^{\alpha t}(\alpha\cos t-\sin t,\alpha\sin t+\cos t)$$
d'où
$$\frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(\alpha\cos t-\sin t,\alpha\sin t+\cos t)$$
Puis
$$\sigma_u'(t)=(\cos u,\sin u)$$
et
$$\begin{aligned}\langle\frac{\gamma'(t_1)}{\|\gamma'(t_1)\|},\sigma_u'(t_2)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left(\alpha(\cos t_1\cos u+\sin t_1\sin u)-\sin t_1\cos u+\sin u\cos t_1\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\left(\alpha(\cos(t_1-u)+\sin(u-t_1)\right)\\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\end{aligned}$$
car $t_1=u+2k\pi$.
iv) Le cosinus de l'angle entre $(g\circ\gamma)'(t_1)$ et $(g\circ\sigma_u)'(t_2)$ est donné par
$$\langle\frac{(g\circ\gamma)'(t_1)}{\|(g\circ\gamma)'(t_1)\|},\frac{(g\circ\sigma_u)'(t_2)}{\|(g\circ\sigma_u)'(t_2)\|}\rangle.$$
Or
$$\begin{aligned}\langle\frac{(g\circ\gamma)'(t_1)}{\|(g\circ\gamma)'(t_1)\|},\frac{(g\circ\sigma_u)'(t_2)}{\|(g\circ\sigma_u)'(t_2)\|}\rangle &= \langle\frac{dg(\gamma'(t_1))}{\|dg(\gamma'(t_1))\|},\frac{dg(\sigma_u'(t_2))}{\|dg(\sigma_u'(t_2))\|}\rangle\\ &= \langle\frac{\gamma'(t_1)}{\|\gamma'(t_1)\|},\frac{\sigma_u'(t_2)}{\|\sigma_u'(t_2)\|}\rangle\end{aligned}$$
d'après la question 4 iii). Puisque $\|\sigma_u'(t_2)\|=1$, on obtient
$$\langle\frac{(g\circ\gamma)'(t_1)}{\|(g\circ\gamma)'(t_1)\|},\frac{(g\circ\sigma_u)'(t_2)}{\|(g\circ\sigma_u)'(t_2)\|}\rangle=\langle\frac{\gamma'(t_1)}{\|\gamma'(t_1)\|},\sigma_u'(t_2)\rangle=\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}.$$

Troisième partie : énergie de Willmore.– Soient $0<b<a$. On considère la paramétrisation
$$\begin{array}{rccc} f: & [0,2\pi]\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ & (u,v) & \longmapsto & ((a+b\cos u)\cos v,(a+b\cos u)\sin v,b\sin u)\end{array}$$
et on note $T(a,b)$ son support.

7) i) Soit R_θ la rotation d'angle θ par rapport à l'axe (Oz). Montrer que le support $T(a,b)$ est stable par R_θ i. e. $R_\theta(T(a,b))\subset T(a,b)$.
ii) Faire un dessin du support $T(a,b)$.

Rép.– Soit
$$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

On vérifie par un calcul direct que

$$R_\theta(f(u,v)) = f(u, v+\theta)$$

ainsi S est stable par R_θ

8) On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Pour tout $\theta \in [0, \pi[$, on note e_θ le vecteur $e_\theta = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$. On considère le plan Π_θ passant par l'origine et engendré par (e_θ, e_3).
i) Montrer que $(Oz) \cap T(a,b) = \emptyset$.
ii) Montrer que $T(a,b) \cap \Pi_\theta$ est l'union de deux cercles symétriques par rapport à la droite (Oz).

Rép.– i) Notons $f = (f_1, f_2, f_3)$ les coordonnées de f. On a

$$f(u,v) \in (Oz) \iff f_1(u,v) = f_2(u,v) = 0 \iff f_1^2 + f_2^2 = 0 \iff (a + b\cos u)^2 = 0$$

Cette dernière équation n'a pas de solution car $a > b > 0$.
ii) L'écriture

$$f(u,\theta) = (a + b\cos u)e_\theta + b\sin u\, e_3 \subset \Pi_\theta$$

et

$$f(u, \theta+\pi) = -(a + b\cos u)e_\theta + b\sin u\, e_3 \subset \Pi_\theta$$

montre que les supports des courbes

$$u \longmapsto f(u,\theta) \quad \text{et} \quad u \longmapsto f(u, \theta+\pi)$$

sont dans $\Pi_\theta \cap T(a,b)$. D'après l'expression analytique de ces deux courbes, ces supports sont deux cercles symétriques par rapport à la droite (Oz). Tout autre point $f(u,v)$ se trouve dans un plan Π_v où $v \neq \theta$ et $v \neq \theta + \pi$, et comme $\Pi_v \cap \Pi_\theta = (Oz)$ l'intersection $\Pi_\theta \cap T(a,b)$ ne contient pas $f(u,v)$.

9) i) Montrer que l'élément d'aire de f vaut

$$dS = b(a + b\cos u)dudv.$$

ii) En déduire que f est régulière.
iii) Déterminer l'aire de f.

Rép.– i) Un calcul direct montre que

$$E = b^2, \quad F = 0, \quad G = (a + b\cos u)^2$$

d'où

$$dS = \sqrt{EG - F^2}dudv = |b(a + b\cos u)|dudv.$$

Puisque $a > b > 0$ le signe de $b(a + b\cos u)$ est positif et $dS = b(a + b\cos u)dudv$.
ii) D'après le cours, on sait que

$$\|f_u \wedge f_v\| = \sqrt{EG - F^2}$$

donc f est régulière en (u, v) si et seulement si $\sqrt{(EG - F^2)}(u, v) > 0$, ce qui est le cas ici car $\sqrt{(EG - F^2)} = b(a + b\cos u)$ et $a > b > 0$.
iii) On a

$$Aire(f) = \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} b(a + b\cos u)dudv = 4ab\pi^2.$$

10) i) Sachant que la matrice dans la base (f_u, f_v) de l'opérateur de Weingarten de f est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{a + b\cos u} \end{pmatrix}$$

montrer que

$$H^2 dS = \left(\cos u + \frac{a^2}{4b(a + b\cos u)}\right) dudv$$

où H est la courbure moyenne de f.
ii) En déduire que

$$\int_{T(a,b)} H^2 dS = \frac{\pi^2 a^2}{b\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Cette intégrale s'appelle *l'énergie de Willmore* de $T(a, b)$. On admettra pour le calcul que l'on a pour tout $\mu > 1$:

$$\int_0^\pi \frac{1}{\mu + \cos u} du = \frac{\pi}{\sqrt{\mu^2 - 1}}.$$

iii) Montrer que pour tout $\lambda > 1$, on a

$$\frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \geq 2$$

et en déduire que

$$\int_{T(a,b)} H^2 dS \geq 2\pi^2$$

avec égalité si et seulement si $a/b = \sqrt{2}$.

Rép.– i) On a

$$H = \frac{1}{2} tr\, A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{\cos u}{a + b\cos u}\right) = \frac{a + 2b\cos u}{2b(a + b\cos u)}$$

d'où

$$\begin{aligned}
H^2dS &= \frac{(a+2b\cos u)^2}{4b^2(a+b\cos u)^2}b(a+b\cos u)dudv \\
&= \frac{(a+2b\cos u)^2}{4b(a+b\cos u)}dudv \\
&= \frac{((2a+2b\cos u)-a)^2}{4b(a+b\cos u)}dudv \\
&= \frac{4(a+b\cos u)^2-4a(a+b\cos u)+a^2}{4b(a+b\cos u)}dudv \\
&= \left(\frac{1}{b}(a+b\cos u)-\frac{a}{b}+\frac{a^2}{4b(a+b\cos u)}\right)dudv \\
&= \left(\cos u+\frac{a^2}{4b(a+b\cos u)}\right)dudv
\end{aligned}$$

ii) On a

$$\begin{aligned}
\int_{T(a,b)} H^2dS &= \int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}\left(\cos u+\frac{a^2}{4b(a+b\cos u)}\right)dudv \\
&= 2\pi\int_0^{2\pi}\left(\cos u+\frac{a^2}{4b(a+b\cos u)}\right)du \\
&= 2\pi\int_0^{2\pi}\frac{a^2}{4b(a+b\cos u)}du \\
&= 4\pi\int_0^{\pi}\frac{a^2}{4b(a+b\cos u)}du \\
&= \frac{\pi a^2}{b^2}\int_0^{\pi}\frac{1}{\frac{a}{b}+\cos u}du \\
&= \frac{\pi^2a^2}{b^2\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}} \\
&= \frac{\pi^2a^2}{b\sqrt{a^2-b^2}}
\end{aligned}$$

iii) On a

$$\frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2-1}}\geq 2 \iff \frac{\lambda^4}{\lambda^2-1}\geq 4 \iff \lambda^4\geq 4\lambda^2-4 \iff (\lambda^2-2)^2\geq 0.$$

D'où l'inégalité demandée. Notons que l'égalité a lieu si et seulement si $\lambda=\sqrt{2}$. En posant $\lambda=a/b$ on constate que

$$\int_{T(a,b)} H^2dS=\pi^2\frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2-1}}\geq 2\pi^2$$

avec égalité si et seulement si $a/b=\sqrt{2}$.

11) On considère la surface paramétrée $Inv\circ f$.
i) Montrer, en utilisant la question 2, que le support de $Inv\circ f$ est un tore $T(a^*,b^*)$ et déterminer a^* et b^*.

ii) Montrer que

$$\int_{T(a^*,b^*)} H^2 dS = \int_{T(a,b)} H^2 dS.$$

Rép.– i) On déduit immédiatement des questions 2) et 8) que le support de $Inv \circ f$ est un tore $T(a^*, b^*)$ avec

$$a^* = \frac{ca}{a^2 - b^2} \quad \text{et} \quad b^* = \frac{cb}{a^2 - b^2}.$$

ii) D'après 10 ii) on a

$$\int_{T(a^*,b^*)} H^2 dS = \frac{\pi^2 (a^*)^2}{b^* \sqrt{(a^*)^2 - (b^*)^2}}$$

En remplaçant par les valeurs trouvées précédemment on trouve

$$\frac{\pi^2 (a^*)^2}{b^* \sqrt{(a^*)^2 - (b^*)^2}} = \frac{\pi^2 a^2}{b\sqrt{a^2 - b^2}}$$

d'où l'égalité demandée.