Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Géométrie

Corrigé du contrôle final du vendredi 15 janvier 2021

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Notations.– Comme toujours, toutes les applications sont supposées C^∞. Pour alléger les écritures, on note parfois dans ce sujet ∂_x et ∂_y pour $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$; f_x et f_y pour $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Première partie : Le lemme de Poincaré.– Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\eta = Pdx + Qdy$ une 1-forme sur U. On dit que la forme η est *exacte* s'il existe $\psi : U \to \mathbb{R}$ tel que $\eta = d\psi$. On dit que η est *fermée* si $d\eta = 0$, autrement dit si $\partial_x Q - \partial_y P = 0$.

1) On suppose que la 1-forme η est exacte. Montrer qu'elle est fermée.

Rép.– Si $\eta = \partial_x\psi + \partial_y\psi$ alors $\partial_y P = \partial_y\partial_x\psi$ et $\partial_x Q = \partial_x\partial_y\psi$. D'après le théorème de Schwartz, on a

$$\partial_y\partial_x\psi = \partial_x\partial_y\psi$$

ainsi $d\eta = 0$.

On dit qu'un ouvert U est *étoilée par rapport à l'origine* si pour tout point $(x, y) \in U$, le segment joignant l'origine à ce point est inclus dans U. On suppose désormais que U est étoilée par rapport à l'origine.

2) Pour tout point $(x, y) \in U$ on note $\gamma_{x,y} = (\gamma^1_{x,y}, \gamma^2_{x,y})$ la courbe plane paramétrée joignant linéairement l'origine à (x, y) :

$$\begin{array}{rccl} \gamma_{x,y} : & [0,1] & \to & U \\ & t & \mapsto & (\gamma^1_{x,y}(t), \gamma^2_{x,y}(t)) = (tx, ty). \end{array}$$

et on considère la composée $g_{x,y} = P \circ \gamma_{x,y}$.

a) Montrer que

$$P(x, y) = \int_0^1 g_{x,y}(t) + t g'_{x,y}(t) dt.$$

b) Montrer que

$$g'_{x,y}(t) = x(\partial_x P)(tx, ty) + y(\partial_y P)(tx, ty).$$

Rép.– a) On a
$$\int_0^1 g_{x,y}(t) + tg'_{x,y}(t)dt = \int_0^1 (tg_{x,y}(t))'(t)dt = [tg_{x,y}(t)]_0^1 = g_{x,y}(1) = P(x,y).$$
b) La règle de différentiation d'une composée s'écrit ici
$$g'_{x,y}(t) = dP_{\gamma_{x,y}(t)}(\gamma'_{x,y}(t)).$$
Or $dP_{(x,y)} = (\partial_x P)(x,y)dx + (\partial_y P)(x,y)dy$, on a donc
$$dP_{\gamma_{x,y}(t)}(\gamma'_{x,y}(t)) = (\partial_x P)(\gamma_{x,y}(t))dx(\gamma'_{x,y}(t)) + (\partial_y P)(\gamma_{x,y}(t))dy(\gamma'_{x,y}(t)).$$
Par définition de dx et dy :
$$dx(\gamma'_{x,y}(t)) = (\gamma^1_{x,y})'(t) = x$$
$$dy(\gamma'_{x,y}(t)) = (\gamma^2_{x,y})'(t) = y$$
d'où
$$g'_{x,y}(t) = dP_{\gamma_{x,y}(t)}(\gamma'_{x,y}(t)) = (\partial_x P)(tx,ty)x + (\partial_y P)(tx,ty)y.$$

3) On considère la fonction $\xi : U \to \mathbb{R}$ définie par
$$\xi(x,y) := \int_{\gamma_{x,y}} \eta.$$
a) Montrer que
$$\xi(x,y) := x\int_0^1 P(tx,ty)dt + y\int_0^1 Q(tx,ty)dt$$
b) Montrer que
$$\partial_x\xi(x,y) = \int_0^1 P(tx,ty) + tx(\partial_x P)(tx,ty) + ty(\partial_x Q)(tx,ty)\,dt$$
c) Puis que
$$\partial_x\xi(x,y) = \int_0^1 g_{x,y}(t) + tg'_{x,y}(t)\,dt + y\int_0^1 t\,(\partial_x Q - \partial_y P)\,(tx,ty)\,dt$$
d) On suppose que la 1-forme η est fermée. En déduire que pour tout $(x,y) \in U$, on a
$$\partial_x\xi(x,y) = P(x,y).$$
e) Montrer que si η est fermée sur U alors
$$d\xi = \eta.$$
En particulier, η est exacte. Ce résultat est connu sous le nom de *lemme de Poincaré* pour les ouverts étoilées.

Rép.– a) On a
$$\xi(x,y) = \int_{\gamma_{x,y}} \eta = \int_{\gamma_{x,y}} Pdx + Qdy$$

or

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_{x,y}} Pdx+Qdy &= \int_0^1 P(\gamma_{x,y}(t))dx(\gamma'_{x,y}(t))+Q(\gamma_{x,y}(t))dy(\gamma'_{x,y}(t))\,dt\\ &= \int_0^1 P(tx,ty)x+Q(tx,ty)y\,dt\\ &= x\int_0^1 P(tx,ty)dt+y\int_0^1 Q(tx,ty)dt.\end{aligned}$$

b) On a

$$\begin{aligned}\partial_x\xi(x,y) &= \int_0^1 \partial_x\left(P(tx,ty)x+Q(tx,ty)y\right)dt\\ &= \int_0^1 P(tx,ty)dt+x\int_0^1 \partial_x(P(tx,ty))dt+y\int_0^1 \partial_x(Q(tx,ty))dt\end{aligned}$$

Notons $\delta:[0,1]\to\mathbb{R}^2$, $x\mapsto(tx,ty)$, et $\Phi=P\circ\delta$. On a

$$\Phi'(x)=\partial_x\left(P(tx,ty)\right)=dP_{\delta(x)}(\delta'(x)).$$

Or

$$dP_{\delta(x)}(\delta'(x))=(\partial_xP)(tx,ty)dx(\delta'(x))+(\partial_yP)(tx,ty)dy(\delta'(x))$$

et $\delta'(x)=(t,0)$ donc

$$dP_{\delta(x)}(\delta'(x))=(\partial_xP)(tx,ty)t.$$

Au bilan

$$\partial_x\left(P(tx,ty)\right)=(\partial_xP)(tx,ty)t$$

et similairement

$$\partial_x\left(Q(tx,ty)\right)=(\partial_xQ)(tx,ty)t$$

d'où

$$\partial_x\xi(x,y)=\int_0^1 P(tx,ty)+tx(\partial_xP)(tx,ty)+ty(\partial_xQ)(tx,ty)\,dt.$$

c) D'après ce que l'on a fait plus haut que

$$g_{x,y}(t)+tg'_{x,y}(t)=P(tx,ty)+tx(\partial_xP)(tx,ty)+ty(\partial_yP)(tx,ty)$$

d'où la relation demandée.
d) Si η est fermée alors $\partial_xQ-\partial_yP=0$ et la relation de la question précédente s'écrit

$$\partial_x\xi(x,y)=\int_0^1 g_{x,y}(t)+tg'_{x,y}(t)\,dt.$$

On a montré plus haut que cette intégrale valait $P(x,y)$.
e) Les variables x et y jouant des rôles symétriques, on aura également

$$\partial_y\xi(x,y)=Q(x,y)$$

d'où $d\xi=\eta$.

Seconde partie : Coordonnées isothermes.– Soit

$$f:\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \longmapsto & (x,y,h(x,y))\end{array}$$

une paramétrisation cartésienne où $h : U \to \mathbb{R}$ est C^∞ et U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ étoilée par rapport à l'origine. On note

$$p = h_x \quad \text{et} \quad q = h_y.$$

La première forme fondamentale de f s'écrit donc

$$E = \langle f_x, f_x \rangle = 1 + p^2, \quad F = \langle f_x, f_y \rangle = pq \quad \text{et} \quad G = \langle f_y, f_y \rangle = 1 + q^2$$

Une telle paramétrisation est régulière sur U. Son élément d'aire est donnée par

$$d^2S = W dxdy \quad \text{avec} \quad W = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}.$$

Sa courbure de Gauss et sa courbure moyenne ont pour expression

$$K = \frac{p_x q_y - p_y q_x}{W^4} \quad \text{et} \quad H = \frac{(1+q^2)p_x - pq(p_y + q_x) + (1+p^2)q_y}{2W^3}.$$

Notons que dans ces écritures on peut remplaçer indifféremment p_y par q_x ou inversement (théorème de Schwarz).

4) On considère la 1-forme différentielle $\alpha \in \Omega^1(U)$ définie par

$$\alpha := \frac{1+p^2}{W} dx + \frac{pq}{W} dy.$$

i) Montrer que $d\alpha = (qA_1 + pA_2) dx \wedge dy$ avec

$$A_1 = \frac{(W^2 - p^2)p_x + (1+p^2)q_y - qpq_x}{W^3} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{(q_x - 2p_y)W^2 + (1+p^2)p_y}{W^3}$$

ii) En remplaçant q_x par p_y dans A_2 puis W^2 par sa valeur, montrer que

$$d\alpha = 2qH dx \wedge dy.$$

Rép.– i) On a

$$d\alpha = \left(\partial_x \left(\frac{pq}{W} \right) - \partial_y \left(\frac{1+p^2}{W} \right) \right) dx \wedge dy$$

d'où

$$d\alpha = \frac{(p_x q + p q_x)W - pq\partial_x W - 2p_y p W + (1+p^2)\partial_y W}{W^2} dx \wedge dy$$

Écrivons $d\alpha$ sous la forme $A dx \wedge dy$. Puisque

$$\partial_x W = \frac{pp_x + qq_x}{W} \quad \text{et} \quad \partial_y W = \frac{pp_y + qq_y}{W}$$

la fonction A s'écrit

$$W^3 A = (p_x q + p q_x)W^2 - pq(pp_x + qq_x) - 2p_y p W^2 + (1+p^2)(pp_y + qq_y).$$

En rassemblant tous les termes ayant q en facteur, on obtient

$$W^3 A = q(p_x W^2 - p(pp_x + qq_x) + (1+p^2)q_y) + p(q_x W^2 - 2p_y W^2 + (1+p^2)p_y)$$

soit encore

$$W^3 A = q(p_x(W^2 - p^2) - pqq_x) + (1+p^2)q_y) + p((q_x - 2p_y)W^2 + (1+p^2)p_y)$$

d'où

$$d\alpha = (qA_1 + pA_2)dx \wedge dy$$

avec les fonctions A_1 et A_2 introduites dans l'énoncé.
ii) En remplaçant q_x par p_y dans A_2, il vient

$$A_2 = (1+p^2)p_y - p_yW^2 = p_y((1+p^2) - (1+p^2+q^2)) = -p_yq^2$$

d'où

$$d\alpha = q\frac{(W^2-p^2)p_x + (1+p^2)q_y - qp(q_x+p_y)}{W^3}.$$

Enfin, puisque $W^2 = 1+p^2+q^2$, on obtient

$$d\alpha = q\frac{(1+q^2)p_x + (1+p^2)q_y - qp(q_x+p_y)}{(1+p^2+q^2)^{3/2}}dx \wedge dy = 2qH dx \wedge dy.$$

On introduit une seconde forme différentielle $\beta \in \Omega^1(U)$ définie par

$$\beta := \frac{pq}{W}dx + \frac{1+q^2}{W}dy.$$

et on admet que $d\beta = -2pH dx \wedge dy$. On suppose que f est la paramétrisation d'une surface minimale, autrement dit que la fonction courbure moyenne H est identiquement nulle. Ainsi α et β sont toutes les deux des formes fermées sur U donc exactes d'après le lemme de Poincaré.

5) Soient $\xi_\alpha : U \to \mathbb{R}$ et $\xi_\beta : U \to \mathbb{R}$ telles que $d\xi_\alpha = \alpha$ et $d\xi_\beta = \beta$. On définit $\varphi : U \overset{C^\infty}{\to} \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x,y) = (\varphi^1(x,y), \varphi^2(x,y)) = (x + \xi_\alpha(x,y), y + \xi_\beta(x,y)).$$

a) Soit

$$J\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1_x & \varphi^1_y \\ \varphi^2_x & \varphi^2_y \end{pmatrix}$$

la matrice jacobienne de φ. Montrer que

$$J\varphi = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} W+1+p^2 & pq \\ pq & W+1+q^2 \end{pmatrix}$$

b) Montrer que son déterminant vaut

$$det\, J\varphi = \frac{(W+1)^2}{W}.$$

c) En déduire qu'il existe un ouvert $U_0 \subset U$ contenant l'origine tel que $\varphi : U_0 \to \varphi(U_0)$ soit un difféomorphime.

Rép.– a) On a

$$\partial_x\varphi = \begin{pmatrix} 1+\partial_x\xi_\alpha \\ 0+\partial_x\xi_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{1+p^2}{W} \\ \dfrac{pq}{W} \end{pmatrix}$$

et

$$\partial_y\varphi = \begin{pmatrix} 0+\partial_y\xi_\alpha \\ 1+\partial_y\xi_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{pq}{W} \\ 1+\dfrac{1+q^2}{W} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$J\varphi = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{1+p^2}{W} & \dfrac{pq}{W} \\ \dfrac{pq}{W} & 1+\dfrac{1+q^2}{W} \end{pmatrix} = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} W+1+p^2 & pq \\ pq & W+1+q^2 \end{pmatrix}$$

b) On a donc

$$\begin{aligned} W^2 det\, J\varphi &= (W+1+p^2)(W+1+q^2) - p^2q^2 \\ &= W^2 + (1+p^2+1+q^2)W + (1+p^2)(1+q^2) - p^2q^2 \\ &= W^2 + (1+W^2)W + (1+p^2+q^2+p^2q^2) - p^2q^2 \\ &= W^2 + (1+W^2)W + W^2 \\ &= W(2W+1+W^2). \end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$det\, J\varphi = \frac{(W+1)^2}{W}.$$

c) Puisque $W = (1+p^2+q^2)^{1/2}$, on a $W \geq 1$ et $det\, J\varphi = \frac{(W+1)^2}{W} > 0$. En tout point de U, et donc en particulier en l'origine, on a $det\, J\varphi \neq 0$. Le théorème d'inversion locale assure l'existence d'un ouvert $U_0 \subset U$ contenant l'origine tel que $\varphi_{|U_0} : U_0 \to \varphi(U_0)$ soit un C^∞-difféomorphisme.

6) On note

$$\begin{array}{rccl} \psi: & \varphi(U_0) & \longrightarrow & U_0 \\ & (u,v) & \longmapsto & (x,y) = (\psi^1(u,v), \psi^2(u,v)) \end{array}$$

l'inverse de φ et on considère la reparamétrisation $g = f \circ \psi$ de f.

a) Montrer que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} g_u(u,v) &=& \psi^1_u(u,v) f_x(\psi(u,v)) + \psi^2_u(u,v) f_y(\psi(u,v)) \\ g_v(u,v) &=& \psi^1_v(u,v) f_x(\psi(u,v)) + \psi^2_v(u,v) f_y(\psi(u,v)) \end{array} \right.$$

b) Montrer que

$$(J\psi)(\varphi(x,y)) = \frac{1}{(1+W)^2}\begin{pmatrix} W+1+q^2 & -pq \\ -pq & W+1+p^2 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Rép.– a) La règle de différentiation de la composée $g = f \circ \psi$ au point $(u,v) \in \varphi(U_0)$ s'écrit

$$dg_{(u,v)} = df_{\psi(u,v)} \circ d\psi_{(u,v)}$$

soit, en passant aux matrices jacobiennes,

$$\begin{aligned} (\partial_u g, \partial_v g)(u,v) &= (\partial_x f, \partial_y f)(\psi(u,v)) \cdot (J\psi)(u,v) \\ &= (\partial_x f, \partial_y f)(\psi(u,v)) \cdot \begin{pmatrix} \psi_u^1(u,v) & \psi_v^1(u,v) \\ \psi_u^2(u,v) & \psi_v^2(u,v) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalement

$$g_u(u,v) = \psi_u^1(u,v) f_x(\psi(u,v)) + \psi_u^2(u,v) f_y(\psi(u,v))$$

$$g_v(u,v) = \psi_v^1(u,v) f_x(\psi(u,v)) + \psi_v^2(u,v) f_y(\psi(u,v))$$

b) D'après le théorème d'inversion locale, pour tout $(x,y) \in U_0$ on a

$$(J\psi)(\varphi(x,y)) = ((J\varphi)(x,y))^{-1}.$$

L'expression de $(J\varphi)(x,y)$ obtenue plus haut et la formule d'inversion d'une matrice 2x2 permettent d'écrire

$$((J\varphi)(x,y))^{-1} = \frac{W}{(1+W)^2}\frac{1}{W}\begin{pmatrix} W+1+q^2 & -pq \\ -pq & W+1+p^2 \end{pmatrix}$$

d'où l'expression demandée.

7) On pose $Z := W+1$.

a) Montrer que

$$p^2 + q^2 = Z(Z-2).$$

b) Montrer que

$$\langle g_u, g_v \rangle = \frac{pq}{Z^4}(Z^2 - 2Z - p^2 - q^2)$$

c) En déduire que g_u et g_v sont orthogonaux.

Rép.– a) De $W^2 = 1 + p^2 + q^2$, on tire

$$p^2 + q^2 = W^2 - 1 = (W-1)(W+1) = (Z-2)Z.$$

b) On a

$$\begin{aligned} \langle g_u, g_v \rangle &= \psi_u^1 \psi_v^1 \langle f_x \circ \psi, f_x \circ \psi \rangle + \psi_u^2 \psi_v^2 \langle f_y \circ \psi, f_y \circ \psi \rangle \\ &\quad + (\psi_u^1 \psi_v^2 + \psi_u^2 \psi_v^1) \langle f_x \circ \psi, f_y \circ \psi \rangle \end{aligned}$$

D'après l'énoncé, $E = \langle f_x, f_x \rangle = 1 + p^2$, $F = \langle f_x, f_y \rangle = pq$ et $G = \langle f_y, f_y \rangle = 1 + q^2$ d'où

$$\begin{aligned}
(1+W)^4 \langle g_u, g_v \rangle &= \left(W + 1 + q^2\right)(-pq)\left(1+p^2\right) \\
&\quad + \left(W + 1 + p^2\right)(-pq)\left(1+q^2\right) \\
&\quad + \left(\left(W+1+p^2\right)\left(W+1+q^2\right) + p^2q^2\right) pq \\
&= pqC
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
C &= -(Z+q^2)(1+p^2) - (Z+p^2)(1+q^2) + (Z+p^2)(Z+q^2) + p^2q^2 \\
&= Z^2 - 2Z - (p^2+q^2).
\end{aligned}$$

c) D'après le a) la quantité $Z^2 - 2Z - (p^2 + q^2)$ vaut zéro. Ainsi g_u et g_v sont orthogonaux.

8) a) Montrer que

$$Z^4 \langle g_u, g_u \rangle = (1+p^2)Z^2 + 2q^2 Z + q^2(q^2+p^2)$$

b) En déduire que : $\|g_u\|^2 = \frac{W^2}{(W+1)^2}$.

c) Montrer également que $\|g_v\|^2 = \frac{W^2}{(W+1)^2}$.

Rép.– a) On a

$$\begin{aligned}
\langle g_u, g_u \rangle &= (\psi_u^1)^2 \langle f_x \circ \psi, f_x \circ \psi \rangle + (\psi_u^2)^2 \langle f_y \circ \psi, f_y \circ \psi \rangle \\
&\quad + 2\psi_u^1 \psi_u^2 \langle f_x \circ \psi, f_y \circ \psi \rangle
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
Z^4 \langle g_u, g_u \rangle &= \left(Z + q^2\right)^2 (1+p^2) + p^2q^2(1+q^2) - 2pq\left(Z+q^2\right)pq \\
&= Z^2(1+p^2) + 2q^2 Z(1+p^2) + q^4(1+p^2) \\
&\quad + p^2q^2(1+q^2) - 2p^2q^2Z - 2p^2q^4 \\
&= Z^2(1+p^2) + 2q^2 Z + q^4(1+p^2) \\
&\quad + p^2q^2(1+q^2) - 2p^2q^4 \\
&= Z^2(1+p^2) + 2q^2 Z + q^4 + p^2q^2
\end{aligned}$$

b) On a donc

$$Z^4 \langle g_u, g_u \rangle = Z^2(1+p^2) + q^2(2Z + q^2 + p^2)$$

or $2Z + p^2 + q^2 = Z^2$ d'après ce qui a été prouvé plus haut. Donc

$$Z^4 \langle g_u, g_u \rangle = Z^2(1 + p^2 + q^2)$$

c'est-à-dire $\|g_u\|^2 = \frac{W^2}{Z^2}$.

c) Les variables p et q jouent des rôles symétriques. On a nécessairement $\|g_v\|^2 = \frac{W^2}{Z^2}$.

9) Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ le support d'une surface paramétrée régulière. On dit qu'une paramétrisation g de S est *isothermale* si

$$\|g_u\| = \|g_v\| \quad \text{et} \quad \langle g_u, g_v \rangle = 0.$$

Montrer que si S est minimale alors elle admet au voisinage de chacun de ses points une paramétrisation isothermale.

Rép.– D'après le cours, si $m_0 \in S$ est un point régulier, alors S admet au voisinage de ce point un paramétrage cartésien f. D'après ce que l'on vient de faire, il existe un reparamétrage g de f (sur un voisinage eventuellement plus petit) tel que g soit une paramétrisation isothermale.

CULTURE.– En réalité, toute surface paramétrée régulière admet au voisinage de chacun de ses points une reparamétrisation isothermale. En général, cette reparamétrisation est obtenue en résolvant une EDP : l'équation de Beltrami. L'hypothèse $H \equiv 0$ permet une autre approche. Dans ce cas, il se trouve que l'on peut construire une reparamétrisation explicite au moyen des primitives des formes α et β.