Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Géométrie

Contrôle final du 6 janvier 2022 - Durée 2h

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

UN FORMULAIRE TRIGONOMÉTRIQUE EST DISPONIBLE EN FIN DE SUJET.

Exercice. – Le but de cet exercice est d'établir l'inégalité isopérimétrique pour le triangle.

Soit (x, y, z) un triplet de nombres positifs. On rappelle que (x, y, z) correspond à un triplet de longueurs des côtés d'un triangle si et seulement si

$$x \leq y + z, \quad y \leq z + x \quad \text{et} \quad z \leq x + y.$$

L'aire d'un tel triangle est alors donnée par la *formule de Héron* :

$$Aire(x, y, z) = \frac{1}{4}\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^4 + y^4 + z^4)}.$$

Soit $p > 0$ un nombre réel. On cherche à maximiser la fonction

$$g(x, y, z) = A^2(x, y, z) \quad \text{sous la contrainte} \quad h(x, y, z) = 0$$

où $h(x, y, z) = x + y + z - p$.

1) On pose

$$D = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^3 \,|\, x \leq y + z, \quad y \leq z + x \quad \text{et} \quad z \leq x + y\}.$$

Montrer que g admet au moins un maximum sur $Int\, D \cap h^{-1}(0)$.

2) i) Montrer que si (x, y, z) est un point critique de g sur $Int\, D \cap h^{-1}(0)$ alors il existe λ tel que

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{lcll} x(-x^2 + y^2 + z^2) & = & 4\lambda & (L_1) \\ y(x^2 - y^2 + z^2) & = & 4\lambda & (L_2) \\ z(x^2 + y^2 - z^2) & = & 4\lambda & (L_3) \\ x + y + z & = & p & (L_4) \end{array} \right.$$

ii) En effectuant la différence $L_1 - L_2$ et en utilisant L_4 montrer que $x = y$ ou $z = p/2$.

iii) Montrer que si $z = p/2$ alors (x, y, z) n'est pas dans $Int\, D$.

iv) En déduire que la seule solution de (Σ) dans $Int\, D$ est $x = y = z = p/3$.

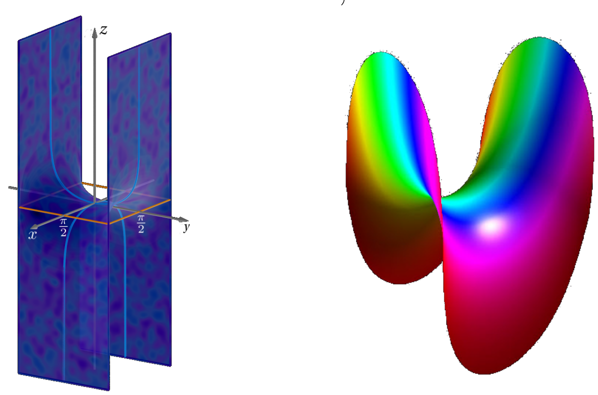
3) En déduire que pour tout triangle, on a l'inégalité isopérimétrique suivante

$$12\sqrt{3}A \leq p^2$$

où p est le périmètre et A l'aire du triangle. L'égalité ayant lieu si et seulement si le triangle est équilatéral.

Problème. – Le but de ce problème est l'étude de la paramétrisation de la sphère induite par l'application normale d'une surface.

Partie I : Étude d'un exemple, la surface de Scherk.



Surface de Scherk, une vue globale et une vue détaillée au voisinage de l'origine

1) On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} h: &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & e^z\cos y - \cos x. \end{array}$$

L'ensemble $\mathcal{S} = h^{-1}(0)$ est appelé la *surface de Scherk* sur le carré.
i) Montrer que h est une submersion.
ii) Montrer que $\mathcal{S}$ est une sous-variété de dimension deux de $\mathbb{R}^3$.
iii) Montrer qu'une normale unitaire $n(x,y,z)$ en tout point $(x,y,z) \in \mathcal{C}$ est donnée par

$$n(x,y,z) = \pm\frac{1}{\sqrt{\sin^2 x + e^{2z}}}\begin{pmatrix} \sin x \\ -e^z\sin y \\ e^z\cos y \end{pmatrix}$$

iv) Montrer que $\mathcal{S}$ est le graphe de la fonction

$$(x,y) \longmapsto \ln\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right)$$

au dessus du carré $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
v) Montrer que $\mathcal{S}$ est invariante par la réflexion de plan (Oyz) et la réflexion de plan (Oxz).

2) On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u,v,\ln\Big(\dfrac{\cos u}{\cos v}\Big)). \end{array}$$

i) Déterminer les cœfficients E, F et G de la première forme fondamentale.
ii) Montrer que f est une immersion.

3) On note $N:\mathcal{U}\to\mathbb{S}^2\subset\mathbb{R}^3$ la normale unitaire donnée par

$$N=\frac{f_u\wedge f_v}{\|f_u\wedge f_v\|}.$$

i) Déterminer les coordonnées de N.
ii) Calculer les cœfficients $\mathcal{L},\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de la seconde forme fondamentale et les exprimer en fonction de E, F et G.
iii) Montrer que la surface de Scherk est une surface *minimale*, c'est-à-dire que sa courbure moyenne H est identiquement nulle.
iv) Exprimer la courbure de Gauss K de $\mathcal{S}$ en fonction de $\tan u$ et $\tan v$.

4) On considère la normale $N:\mathcal{U}\to\mathbb{S}^2$ en tant qu'application paramétrant tout ou une portion de la sphère.
i) Montrer que $N_u\wedge N_v$ est proportionnel à N.
ii) Soient (e_1,e_2,e_3) la base standard de $\mathbb{R}^3$. On pose

$$V_1:=\frac{1}{q}(1+\tan^2 u)e_1 \quad \text{et} \quad V_2:=\frac{-1}{q}(1+\tan^2 v)e_2.$$

où $q=\sqrt{EG-F^2}$. Montrer que

$$N_u=W_1+V_1 \quad \text{et} \quad N_v=W_2+V_2$$

où W_1 et W_2 sont des vecteurs proportionnels à N.
iii) Montrer que $\langle N_u\wedge N_v,N\rangle=\langle V_1\wedge V_2,N\rangle$.
iv) En déduire que $N_u\wedge N_v=\sqrt{EG-F^2}KN$.
v) En déduire enfin que N est une immersion.

Partie II : Étude générale de l'application N.

5) Soit α la 2-forme différentielle de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\alpha_{(x,y,z)}(X,Y) := \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} \rangle$$

pour tout X, Y de $\mathbb{R}^3$. On considère une immersion $g : \mathcal{U} \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ d'un ouvert $\mathcal{U}$ dans la sphère unité.
i) Montrer qu'une normale unitaire en (u,v) de g est donnée par $g(u,v)$.
ii) Montrer que

$$\int_{g(\mathcal{U})} \alpha = \pm \int_{\mathcal{U}} \|g_u \wedge g_v\| du \wedge dv.$$

iii) En déduire que

$$Aire(g) = \pm \int_{g(\mathcal{U})} \alpha.$$

6) On note désormais $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ une immersion quelconque et on considère son application normale $N : \mathcal{U} \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ donnée par

$$N = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}.$$

i) Écrire N_u et N_v dans la base (f_u, f_v, N) en fonction des coefficients (a_{ij}) de la matrice A de l'endomorphisme de Weingarten.
ii) Soit K est la courbure de Gauss de $\mathcal{S} = f(\mathcal{U})$. Montrer que

$$N_u \wedge N_v = K.f_u \wedge f_v.$$

iii) Déduire que N est une immersion en (u,v) si et seulement si $K(u,v) \neq 0$.
iv) Montrer que

$$\int_{N(\mathcal{U})} \alpha = \pm \int_{\mathcal{U}} K\sqrt{EG - F^2} dudv$$

où E, F, G sont les coefficients de la première forme fondamentale de $\mathcal{S}$ dans la base (f_u, f_v).
v) On suppose que K est partout non nul. En déduire que

$$Aire(N) = \pm \int_{\mathcal{U}} K d^2 S.$$

7) Une application $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ est *conforme* si $\langle f_u, f_v \rangle = 0$ et si $\langle f_u, f_u \rangle = \langle f_v, f_v \rangle$. Elle est *harmonique* si $f_{uu} + f_{vv} = 0$. On suppose désormais que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ une immersion conforme et harmonique.
i) Montrer que f est minimale, c'est-à-dire que sa courbure moyenne

H est nulle.
ii) Montrer que

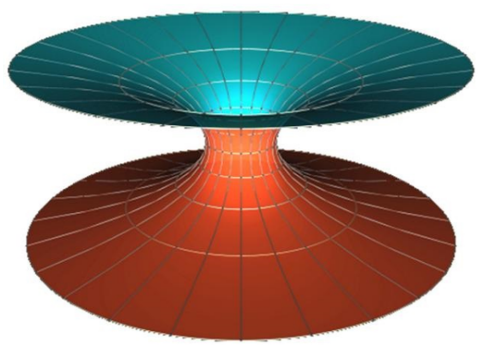
$$N_u = -\frac{1}{E}(\mathcal{L} f_u + \mathcal{M} f_v) \quad \text{et} \quad N_v = -\frac{1}{E}(\mathcal{M} f_u - \mathcal{L} f_v).$$

iii) En déduire que l'application N est conforme.

8) On considère la paramétrisation de la caténoïde donnée par

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,2\pi[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (-\mathrm{ch}v \sin u, \mathrm{ch}v \cos u, v). \end{array}$$

i) Montrer que l'application normale N est conforme.
ii) La paramétrisation conforme de la sphère $N : [0,2\pi[\times\mathbb{R} \to \mathbb{S}^2$ est-elle surjective ?



La caténoïde

Formulaire trigonométrique

$$\tan'\theta = 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\begin{array}{rclrcl} \cos p + \cos q & = & 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} & \cos(a+b) & = & \cos a\cos b - \sin a \sin b \\ \cos p - \cos q & = & -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} & \cos(a-b) & = & \cos a\cos b + \sin a \sin b \\ \sin p + \sin q & = & 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} & \sin(a+b) & = & \sin a\cos b + \sin b \cos a \\ \sin p - \sin q & = & 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}. & \sin(a-b) & = & \sin a\cos b - \sin b \cos a \end{array}$$

$$\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1 \qquad \mathrm{ch}^2 t + \mathrm{sh}^2 t = \mathrm{ch} 2t$$

$$\tanh x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} \qquad \mathrm{sh}(2t) = 2\mathrm{sh}t\,\mathrm{ch}t$$

$$\mathrm{sh}'t = \mathrm{ch}t \qquad \mathrm{ch}'t = \mathrm{sh}t$$