Université Claude Bernard Lyon 1

# M1G – Géométrie

## Corrigé du contrôle final du 6 janvier 2022

*Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.*

Un formulaire trigonométrique est disponible en fin de sujet.

**Exercice.** – Le but de cet exercice est d'établir l'inégalité isopérimétrique pour le triangle.

Soit $(x, y, z)$ un triplet de nombres positifs. On rappelle que $(x, y, z)$ correspond à un triplet de longueurs des côtés d'un triangle si et seulement si

$$x \leq y + z, \quad y \leq z + x \quad \text{et} \quad z \leq x + y.$$

L'aire d'un tel triangle est alors donnée par la *formule de Héron* :

$$Aire(x, y, z) = \frac{1}{4}\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^4 + y^4 + z^4)}.$$

Soit $p > 0$ un nombre réel. On cherche à maximiser la fonction

$$g(x, y, z) = A^2(x, y, z) \quad \text{sous la contrainte} \quad h(x, y, z) = 0$$

où $h(x, y, z) = x + y + z - p$.

1) On pose

$$D = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^3 \,|\, x \leq y + z, \quad y \leq z + x \quad \text{et} \quad z \leq x + y\}.$$

Montrer que $g$ admet au moins un maximum sur $Int\, D \cap h^{-1}(0)$.

**Rép.**– L'application $h$ est continue donc $h^{-1}(0)$ est un fermé, l'ensemble $D$ étant compact, $D \cap h^{-1}(0)$ est compact. La fonction $g$ étant continue, elle admet au moins un maximum sur $D \cap h^{-1}(0)$. Puisque cette fonction est nulle au bord de $D$ ce maximum est nécessairement dans $Int\, D \cap h^{-1}(0)$.

2) i) Montrer que si $(x, y, z)$ est un point critique de $g$ sur $Int\, D \cap h^{-1}(0)$ alors il existe $\lambda$ tel que

$$(\Sigma) \quad \left\{ \begin{array}{lcll} x(-x^2+y^2+z^2) & = & 4\lambda & (L_1) \\ y(x^2-y^2+z^2) & = & 4\lambda & (L_2) \\ z(x^2+y^2-z^2) & = & 4\lambda & (L_3) \\ x+y+z & = & p & (L_4) \end{array} \right.$$

ii) En effectuant la différence $L_1 - L_2$ et en utilisant $L_4$ montrer que $x = y$ ou $z = p/2$.
iii) Montrer que si $z = p/2$ alors $(x, y, z)$ n'est pas dans $Int\, D$.
iv) En déduire que la seule solution de $(\Sigma)$ dans $Int\, D$ est $x = y = z = p/3$.

**Rép.**– L'application $h$ étant une forme linéaire non nulle, c'est une submersion. On introduit la fonction de Lagrange

$$L(x, y, z, \lambda) = g(x, y, z) - \lambda h(x, y, z).$$

Si $(x, y, z)$ est un point critique de $f_{|Int\, D \cap g^{-1}(0)}$ alors il existe $\lambda$ tel que $(x, y, z, \lambda)$ soit un point critique de $L$. Écrivons la différentielle de $L$ :

$$dL_{(x,y,z,\lambda)} = dg_{(x,y,z)} - \lambda dh_{(x,y,z)} - h(x, y, z)d\lambda.$$

On a alors

$$dL_{(x,y,z,\lambda)} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x(-x^2+y^2+z^2) & = & 4\lambda \\ y(x^2-y^2+z^2) & = & 4\lambda \\ z(x^2+y^2-z^2) & = & 4\lambda \\ x+y+z & = & p \end{array} \right.$$

ii) Effectuons la différence des membres de gauche de $(L_1)$ et de $(L_2)$ :

$$\begin{array}{rcl} x(-x^2+y^2+z^2) - y(x^2-y^2+z^2) & = & (y+x)(y^2-x^2) + (x-y)z^2 \\ & = & (y+x)^2(y-x) - (x-y)z^2 \\ & = & (y-x)((y+x)^2 - z^2) \\ & = & (y-x)(y+x-z)(y+x+z). \end{array}$$

Si l'on injecte l'équation $L_4$ on obtient

$$x(-x^2+y^2+z^2) - y(x^2-y^2+z^2) = p(y-x)(p-2z)$$

ainsi $x = y$ ou $z = p/2$.
iii) Supposons $z = p/2$ alors $x + y = p/2$ d'après $L_4$ et donc $z = x + y$ ce qui signifie que $(x, y, z) \in \partial D$.
iv) Symétriquement, en considérant la différence $L_1 - L_3$ on obtiendra $x = z$, et en injectant dans $L_4$, les égalités $x = y = z = p/3$.

3) En déduire que pour tout triangle, on a l'inégalité isopérimétrique suivante

$$12\sqrt{3}A \leq p^2$$

où $p$ est le périmètre et $A$ l'aire du triangle. L'égalité ayant lieu si et seulement si le triangle est équilatéral.

**Rép.–** D'après la question précédente, l'unique maximum de la fonction du carré de l'aire sous la contrainte $h(x, y, z) = 0$ est nécessairement atteint au point $(p/3, p/3, p/3)$. On a alors

$$A^2 = g(p/3, p/3, p/3) = \frac{1}{16}\left(\left(3 \times \frac{p^2}{9}\right)^2 - 6 \times \frac{p^4}{9^2}\right) = \frac{p^4}{3^3 4^2}.$$

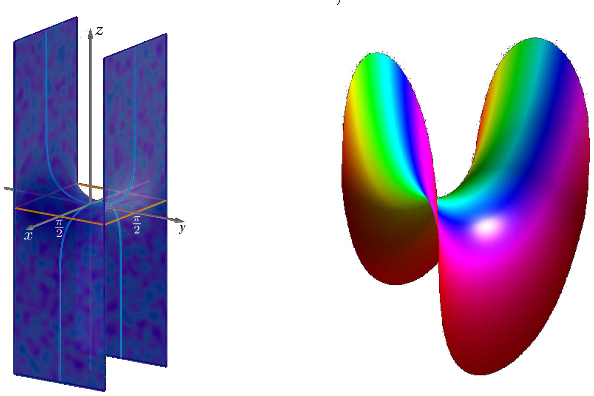
Ainsi

$$A \leq \frac{p^2}{12\sqrt{3}}$$

et l'égalité est atteinte pour les triangles équilatéraux.

**Problème. –** Le but de ce problème est l'étude de la paramétrisation de la sphère induite par l'application normale d'une surface.

## Partie I : Étude d'un exemple, la surface de Scherk.–



*Surface de Scherk, une vue globale et une vue détaillée au voisinage de l'origine*

1) On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} h : & ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \longmapsto & e^z \cos y - \cos x. \end{array}$$

L'ensemble $\mathcal{S} = h^{-1}(0)$ est appelé la *surface de Scherk* sur le carré.

i) Montrer que $h$ est une submersion.

ii) Montrer que $\mathcal{S}$ est une sous-variété de dimension deux de $\mathbb{R}^3$.

iii) Montrer qu'une normale unitaire $n(x, y, z)$ en tout point $(x, y, z) \in \mathcal{C}$ est donnée par

$$n(x, y, z) = \pm\frac{1}{\sqrt{\sin^2 x + e^{2z}}}\begin{pmatrix} \sin x \\ -e^z \sin y \\ e^z \cos y \end{pmatrix}$$

iv) Montrer que $\mathcal{S}$ est le graphe de la fonction

$$(x,y) \longmapsto \ln\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right)$$

au dessus du carré $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
v) Montrer que $\mathcal{S}$ est invariante par la réflexion de plan $(Oyz)$ et la réflexion de plan $(Oxz)$.

**Rép.**– i) On a

$$\begin{aligned} dh_{(x,y,z)} &= \frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z)dz \\ &= \sin x\, dx - e^z \sin y\, dy + e^z \cos y\, dz \end{aligned}$$

Ainsi

$$dh_{(x,y,z)} = 0 \iff \sin x = 0 \quad \text{et} \quad \sin y = 0 \quad \text{et} \quad \cos y = 0$$

Or $\sin y$ et $\cos y$ ne peuvent valoir simultanément zéro, par conséquent $h$ est une submersion.
ii) Par le théorème de la submersion, $h^{-1}(0)$ est une sous-variété de dimension deux de $\mathbb{R}^3$.
iii) Une normale unitaire en $(x,y,z)$ est donnée par

$$n(x,y,z) = \pm\frac{\text{grad } h}{\|\text{grad } h\|} = \pm\frac{1}{\sqrt{\sin^2 x + e^{2z}}}\begin{pmatrix} \sin x \\ -e^z \sin y \\ e^z \cos y \end{pmatrix}.$$

iv) Un point $(x,y,z)$ est un élément de $\mathcal{S}$ si et seulement si

$$e^z \cos y - \cos x = 0 \iff e^z = \frac{\cos x}{\cos y}.$$

Notons que le quotient $\frac{\cos x}{\cos y}$ est bien défini et positif sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Ainsi

$$e^z \cos y - \cos x = 0 \iff z = \ln\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right)$$

Autrement dit, $\mathcal{S}$ est le graphe de la fonction

$$(x,y) \longmapsto \ln\left(\frac{\cos x}{\cos y}\right)$$

au dessus du carré $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
v) La réflexion $r_1$ (resp. $r_2$) par rapport au plan $(Oyz)$ (resp. $(Oxz)$) est donnée par

$$r_1(x,y,z) = (-x,y,z) \quad \text{resp. } r_2(x,y,z) = (x,-y,z).$$

Il est ensuite immédiat de vérifier que pour tout $i \in \{1,2\}$ on a

$$h(r_i(x,y,z)) = h(x,y,z).$$

2) On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[ & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & (u,v,\ln\left(\frac{\cos u}{\cos v}\right)). \end{array}$$

i) Déterminer les cœfficients $E, F$ et $G$ de la première forme fondamentale.
ii) Montrer que $f$ est une immersion.

**Rép.**– i) On a

$$f_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\tan u \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \tan v \end{pmatrix}$$

d'où

$$E = 1 + \tan^2 u, \quad F = -\tan u \tan v, \quad G = 1 + \tan^2 v.$$

ii) Pour montrer que $f$ est une immersion, il suffit de montrer que $EG - F^2$ ne s'annule jamais :

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= (1 + \tan^2 u)(1 + \tan^2 v) - \tan^2 u \tan^2 v \\ &= 1 + \tan^2 u + \tan^2 v \geq 1. \end{aligned}$$

3) On note $N : \mathcal{U} \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ la normale unitaire donnée par

$$N = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}.$$

i) Déterminer les coordonnées de $N$.
ii) Calculer les cœfficients $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de la seconde forme fondamentale et les exprimer en fonction de $E, F$ et $G$.
iii) Montrer que la surface de Scherk est une surface *minimale*, c'est-à-dire que sa courbure moyenne $H$ est identiquement nulle.
iv) Exprimer la courbure de Gauss $K$ de $\mathcal{S}$ en fonction de $\tan u$ et $\tan v$.

**Rép.**– i) C'est un calcul direct

$$N = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 u + \tan^2 v}} \begin{pmatrix} \tan u \\ -\tan v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Calculons les dérivées secondes de $f$. On a $f_{uv} = 0$ et

$$f_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(1 + \tan^2 u) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 + \tan^2 v \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \langle N, f_{uu} \rangle = -\frac{1 + \tan^2 u}{\sqrt{1 + \tan^2 u + \tan^2 v}} = -\frac{E}{\sqrt{EG - F^2}} \\ \mathcal{M} &= 0 \\ \mathcal{N} &= \langle N, f_{vv} \rangle = \frac{1 + \tan^2 v}{\sqrt{1 + \tan^2 u + \tan^2 v}} = \frac{G}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{aligned}$$

iii) Puisque

$$H = \frac{1}{2} \frac{G\mathcal{L} - 2F\mathcal{M} + E\mathcal{N}}{EG - F^2}$$

et que $\mathcal{M} = 0$ on a
$$H = \frac{1}{2}\frac{G\mathcal{L} + E\mathcal{N}}{EG - F^2}.$$
D'après les résultats obtenus en ii) il est immédiat que
$$G\mathcal{L} + E\mathcal{N} = 0$$
ce qui conclut.
iv) De
$$\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2 = -\frac{(1+\tan^2 u)(1+\tan^2 v)}{1+\tan^2 u + \tan^2 v}$$
on déduit
$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2} = -\frac{(1+\tan^2 u)(1+\tan^2 v)}{(1+\tan^2 u + \tan^2 v)^2}.$$

4) On considère la normale $N : \mathcal{U} \to \mathbb{S}^2$ en tant qu'application paramétrant tout ou une portion de la sphère.
i) Montrer que $N_u \wedge N_v$ est proportionnel à $N$.
ii) Soient $(e_1, e_2, e_3)$ la base standard de $\mathbb{R}^3$. On pose
$$V_1 := \frac{1}{q}(1+\tan^2 u)e_1 \quad \text{et} \quad V_2 := \frac{-1}{q}(1+\tan^2 v)e_2.$$
où $q = \sqrt{EG - F^2}$. Montrer que
$$N_u = W_1 + V_1 \quad \text{et} \quad N_v = W_2 + V_2$$
où $W_1$ et $W_2$ sont des vecteurs proportionnels à $N$.
iii) Montrer que $\langle N_u \wedge N_v, N\rangle = \langle V_1 \wedge V_2, N\rangle$.
iv) En déduire que $N_u \wedge N_v = \sqrt{EG - F^2} K N$.
v) En déduire enfin que $N$ est une immersion.

**Rép.**– i) De $\langle N, N\rangle = 1$ on déduit en prenant les dérivées par rapport à $u$ et $v$ que
$$\langle N_u, N\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle N_v, N\rangle = 0.$$
Les vecteurs $N_u$ et $N_v$ sont donc tangents à la surface $\mathcal{S}$ et par conséquent $N_u \wedge N_v$ est dans la direction normale.
ii) Si l'on dérive
$$N = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 u + \tan^2 v}} \begin{pmatrix} \tan u \\ -\tan v \\ 1 \end{pmatrix}.$$
par rapport à $u$ on obtient
$$N_u = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 u + \tan^2 v}}\right) \cdot \begin{pmatrix} \tan u \\ -\tan v \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 u + \tan^2 v}} \cdot \begin{pmatrix} 1+\tan^2 u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
Notons que le premier terme est proportionnel à $N$ et que le second est exactement $V_1$. On a donc obtenu $N_u = W_1 + V_1$. La même dérivation, effectuée par rapport à

$v$, montre le résultat correspondant pour $N_v$.
iii) On a

$$\begin{aligned}\langle N_u \wedge N_v, N\rangle &= det(N_u, N_v, N)\\ &= det(W_1+V_1, W_2+V_2, N)\\ &= det(V_1, V_2, N)\end{aligned}$$

car $W_1$ et $W_2$ sont proportionnels à $N$ ce qui annule les termes $det(W_1, *, N)$, $det(*, W_2, N)$ et $det(W_1, W_2, N)$. Enfin

$$det(V_1, V_2, N) = \langle V_1 \wedge V_2, N\rangle.$$

iv) D'après la question i) $N_u \wedge N_v$ est proportionnel à $N$ et on a donc nécessairement

$$N_u \wedge N_v = \langle N_u \wedge N_v, N\rangle N.$$

D'après la question précédente

$$N_u \wedge N_v = \langle V_1 \wedge V_2, N\rangle N.$$

Un calcul direct montre que

$$V_1 \wedge V_2 = -\frac{(1+\tan^2 u)(1+\tan^2 v)}{q^2} e_3.$$

Or $\langle e_3, N\rangle = \frac{1}{q}$ ainsi

$$N_u \wedge N_v = -\frac{(1+\tan^2 u)(1+\tan^2 v)}{q^3} N = KqN.$$

v) L'expression de $K$ trouvée précédemment montre que $K<0$. Ainsi $\|N_u \wedge N_v\| > 0$ et $N$ est une immersion.

## Partie II : Étude générale de l'application $N$.

5) Soit $\alpha$ la 2-forme différentielle de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$\alpha_{(x,y,z)}(X,Y) := \langle \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1\\ X_2\\ X_3\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Y_1\\ Y_2\\ Y_3\end{pmatrix}\rangle$$

pour tout $X, Y$ de $\mathbb{R}^3$. On considère une immersion $g : \mathcal{U} \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ d'un ouvert $\mathcal{U}$ dans la sphère unité.
i) Montrer qu'une normale unitaire en $(u,v)$ de $g$ est donnée par $g(u,v)$.
ii) Montrer que

$$\int_{g(\mathcal{U})} \alpha = \pm \int_{\mathcal{U}} \|g_u \wedge g_v\| du \wedge dv.$$

iii) En déduire que

$$Aire(g) = \pm \int_{g(\mathcal{U})} \alpha.$$

**Rép.**– i) Puisque $g$ est à valeurs dans la sphère unité on a $\langle g, g\rangle = 1$. Par simple dérivation, on obtient $\langle g, g_u\rangle = 0$ et $\langle g, g_v\rangle = 0$ ce qui montre que $g$ est perpendiculaire à $Vect(g_u, g_v)$. Ainsi, en tout point, $g(u,v)$ est une normale unitaire

de $g$.
ii) Par définition

$$\begin{aligned}\int_{g(\mathcal{U})} \alpha &= \int_{\mathcal{U}} \alpha_{g(u,v)}(g_u, g_v)dudv \\ &= \int_{\mathcal{U}} \langle g(u,u), g_u \wedge g_v \rangle dudv\end{aligned}$$

Puisque $g$ est une normale unitaire, on doit avoir

$$g(u,v) = \pm \frac{g_u \wedge g_v}{\|g_u \wedge g_v\|}.$$

Au final

$$\begin{aligned}\int_{g(\mathcal{U})} \alpha &= \pm \int_{\mathcal{U}} \langle \frac{g_u \wedge g_v}{\|g_u \wedge g_v\|}, g_u \wedge g_v \rangle \, dudv \\ &= \pm \int_{\mathcal{U}} \|g_u \wedge g_v\| dudv.\end{aligned}$$

iii) Par définition de l'aire on a d'une part

$$Aire(g) = \int_{\mathcal{U}} \|g_u \wedge g_v\| dudv.$$

D'autre part

$$\int_{g(\mathcal{U})} \alpha = \pm \int_{\mathcal{U}} \|g_u \wedge g_v\| dudv$$

ce qui conclut.

6) On note désormais $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ une immersion quelconque et on considère son application normale $N : \mathcal{U} \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ donnée par

$$N = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|}.$$

i) Écrire $N_u$ et $N_v$ dans la base $(f_u, f_v, N)$ en fonction des coefficients $(a_{ij})$ de la matrice $A$ de l'endomorphisme de Weingarten.
ii) Soit $K$ est la courbure de Gauss de $\mathcal{S} = f(\mathcal{U})$. Montrer que

$$N_u \wedge N_v = K.f_u \wedge f_v.$$

iii) Déduire que $N$ est une immersion en $(u,v)$ si et seulement si $K(u,v) \neq 0$.
iv) Montrer que

$$\int_{N(\mathcal{U})} \alpha = \pm \int_{\mathcal{U}} K\sqrt{EG - F^2} dudv$$

où $E, F, G$ sont les coefficients de la première forme fondamentale de $\mathcal{S}$ dans la base $(f_u, f_v)$.
v) On suppose que $K$ est partout non nul. En déduire que

$$Aire(N) = \pm \int_{\mathcal{U}} K d^2 S.$$

**Rép.**– i) Puisque $N$ est unitaire, les dérivées partielles $N_u$ et $N_v$ n'ont pas de composante sur $N$. La matrice $A$ étant celle de l'opérateur de Weingarten $-dN$ dans la base $(f_u, f_v)$ on a par définition de $A$

$$N_u = a_{11} f_u + a_{21} f_v \quad \text{et} \quad N_v = a_{12} f_u + a_{22} f_v.$$

ii) On en déduit

$$N_u \wedge N_v = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) f_u \wedge f_v = det\, A f_u \wedge f_v.$$

Par définition $det\, A$ est la courbure de Gauss $K$.
iii) Immédiat d'après ii. iv) D'après le ii) de la question précédente on a

$$\int_{N(\mathcal{U})} \alpha = \pm \int_{\mathcal{U}} \|N_u \wedge N_v\| dudv.$$

D'après le ii) de cette question

$$\begin{aligned} \int_{N(\mathcal{U})} N\alpha &= \pm \int_{\mathcal{U}} K \|f_u \wedge f_v\| dudv \\ &= \pm \int_{\mathcal{U}} K \sqrt{EG - F^2} dudv. \end{aligned}$$

v) D'après le iii) $N$ est une paramétrisation (=immersion) de la sphère. D'après le iii) de la question précédente on peut conclure

$$Aire(N) = \pm \int_{\mathcal{U}} N^* \alpha = \pm \int_{\mathcal{U}} K d^2 S.$$

7) Une application $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ est *conforme* si $\langle f_u, f_v \rangle = 0$ et si $\langle f_u, f_u \rangle = \langle f_v, f_v \rangle$. Elle est *harmonique* si $f_{uu} + f_{vv} = 0$. On suppose désormais que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$ une immersion conforme et harmonique.
i) Montrer que $f$ est minimale, c'est-à-dire que sa courbure moyenne $H$ est nulle.
ii) Montrer que

$$N_u = -\frac{1}{E}(\mathcal{L} f_u + \mathcal{M} f_v) \quad \text{et} \quad N_v = -\frac{1}{E}(\mathcal{M} f_u - \mathcal{L} f_v).$$

iii) En déduire que l'application $N$ est conforme.

**Rép.**– i) À partir de la formule donnant la courbure moyenne

$$H = \frac{E\mathcal{N} - 2F\mathcal{M} + G\mathcal{L}}{2(EG - F^2)}.$$

et puisque $f$ est conforme ($E = G$ et $F = 0$) on obtient

$$H = \frac{\mathcal{N} + \mathcal{L}}{2E}.$$

Or

$$\mathcal{L} = -\langle N_u, f_u \rangle = \langle N, f_{uu} \rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{N} = -\langle N_v, f_v \rangle = \langle N, f_{vv} \rangle$$

ainsi

$$\mathcal{L} + \mathcal{N} = \langle N, f_{uu} + f_{vv} \rangle = 0$$

car $f$ est harmonique.
ii) Puisque $E = G$, $F = 0$ et $\mathcal{N} = -\mathcal{L}$ la matrice de l'opérateur de Weingarten $W = -dN$ a la forme suivante

$$Mat_{\mathcal{B}(f)}(W) = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G\mathcal{L} - F\mathcal{M} & G\mathcal{M} - F\mathcal{N} \\ E\mathcal{M} - F\mathcal{L} & E\mathcal{N} - F\mathcal{M} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & -\mathcal{L} \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$N_u = -\frac{1}{E}(\mathcal{L} f_u + \mathcal{M} f_v) \quad \text{et} \quad N_v = -\frac{1}{E}(\mathcal{M} f_u - \mathcal{L} f_v).$$

iii) On constate que

$$\begin{aligned} \langle N_u, N_u \rangle &= \frac{1}{E^2}(\mathcal{L}^2 \langle f_u, f_u \rangle + 2\mathcal{L}\mathcal{M}\langle f_u, f_v \rangle + \mathcal{M}^2 \langle f_u, f_v \rangle) \\ &= \frac{1}{E}(\mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2) \end{aligned}$$

et similairement que

$$\langle N_v, N_v \rangle = \frac{1}{E}(\mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2) \quad \text{et} \quad \langle N_u, N_v \rangle = 0.$$

Ceci montre que l'application $N$ est conforme.

8) On considère la paramétrisation de la caténoïde donnée par

$$\begin{aligned} f : \quad [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (-\text{ch}v \sin u, \text{ch}v \cos u, v). \end{aligned}$$

i) Montrer que l'application normale $N$ est conforme.
ii) La paramétrisation conforme de la sphère $N : [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^2$ est-elle surjective ?

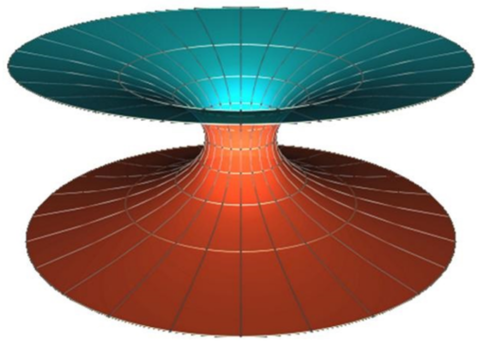
**Rép.**– i) On a

$$f_u = \begin{pmatrix} -\text{ch}v \cos u \\ -\text{ch}v \sin u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_v = \begin{pmatrix} -\text{sh}v \sin u \\ \text{sh}v \cos u \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où $\langle f_u, f_u \rangle = \text{ch}^2 v$, $\langle f_v, f_v \rangle = 1 + \text{sh}^2 v = \text{ch}^2 v$ et $\langle f_u, f_v \rangle = 0$. Ainsi $f$ est conforme.
On a aussi

$$f_{uu} = \begin{pmatrix} \text{ch}v \sin u \\ -\text{ch}v \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_{vv} = \begin{pmatrix} -\text{ch}v \sin u \\ \text{ch}v \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

par conséquent $f_{uu} + f_{vv} = 0$ et $f$ est harmonique. D'après ce que l'on a vu précédemment, ceci implique que l'application normale $N$ est conforme.
ii) On remarque que $f_u$ est toujours horizontal et que $f_v$ ne l'est jamais car sa troisième composante est 1. On en déduit que l'espace vectoriel $Vect(f_u, f_v)$ n'est jamais horizontal ce qui signifie que les pôles Nord et Sud de la sphère ne sont jamais atteint par $N$. L'application normale n'est donc pas surjective sur $\mathbb{S}^2$.



*La caténoïde*

FORMULAIRE TRIGONOMÉTRIQUE.–

$$\tan'\theta = 1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}\\
\cos p - \cos q &= -2\sin\tfrac{p+q}{2}\sin\tfrac{p-q}{2}\\
\sin p + \sin q &= 2\sin\tfrac{p+q}{2}\cos\tfrac{p-q}{2}\\
\sin p - \sin q &= 2\sin\tfrac{p-q}{2}\cos\tfrac{p+q}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\\
\cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b\\
\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \sin b\cos a\\
\sin(a-b) &= \sin a\cos b - \sin b\cos a
\end{aligned}$$

$$\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1 \qquad \mathrm{ch}^2 t + \mathrm{sh}^2 t = \mathrm{ch} 2t$$

$$\tanh x = \frac{\mathrm{sh} x}{\mathrm{ch} x} \qquad \mathrm{sh}(2t) = 2\mathrm{sh} t\,\mathrm{ch} t$$

$$\mathrm{sh}' t = \mathrm{ch} t \qquad \mathrm{ch}' t = \mathrm{sh} t$$