Université Claude Bernard Lyon 1

M1R – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé de l'examen du 7 janvier 2011

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Les deux problèmes sont indépendants. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Il existe une paramétrisation régulière f du plan pour laquelle les cœfficients de la première forme fondamentale vérifient $E = G = 0$ et $F \equiv 1$.

Rép.– Faux, si f est régulière alors $EG - F^2 > 0$.

2.– Si D est une droite contenue dans une surface alors tous les points de D sont à courbure de Gauss nulle.

Rép.– Faux, si $f(u,t) = \gamma(t)+u\delta(t)$ est une surface réglée alors $K(t,u) = -\dfrac{det^2(\gamma',\delta,\delta')}{(EG-F^2)^2}$.

3.– L'hélicoïde est une surface minimale (i.e. à courbure moyenne nulle).

Rép.– Vrai, découverte par Meunier, cf. CM-S4.

4.– Soit $\gamma : I \longrightarrow S$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc et tracée sur une surface S. Si γ est à la fois une géodésique et une courbe asymptotique de S, alors son support est une portion de droite.

Rép.– Vrai, dans le trièdre de Darboux (T, V, n) on a

$$\gamma'' = \frac{dT}{ds} = -k_g V + k_T n.$$

Or γ est une géodésique ssi $k_g = 0$ et γ est une courbe asymptotique ssi $k_T = 0$. Donc $\gamma'' = 0$, qui s'intègre en $\gamma(t) = at + b$ et le support est une droite.

5.– Si S est une surface minimale ($\forall p \in S,\ H(p) = 0$) non plate ($\forall p \in S,\ K(p) \neq 0$) alors il existe en tout point de S exactement deux directions asymptotiques perpendiculaires.

Rép.– Vrai, $H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = 0$ donc $\lambda_1 = -\lambda_2$. Comme $K = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$, les deux courbures principales sont non nulles et donc distinctes, d'où la conclusion.

6.– La sphère est la seule surface S de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle l'application de Gauss $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ soit une bijection.

Rép.– Faux, penser aux ellipsoïdes.

7.– On considère deux lignes de courbure distinctes s'intersectant en un point p d'une surface S. Si les lignes de courbure sont des droites alors le point p est un ombilic de S.

Rép.– Vrai. Soient X_1 et X_2 deux vecteurs directeurs des deux lignes de courbure. Le long de chaque droite on a $k_{X_1} \equiv 0$ et $k_{X_2} \equiv 0$. Au point d'intersection, les courbures principales sont toutes les deux nulles et donc égales.

8.– Les génératrices des surfaces réglées sont des lignes de courbures.

Rép.– Faux, penser au PH= $\{z = xy\}$ et se placer au point $O = (0, 0, 0)$.

9.– Il existe une paramétrisation conforme de la sphère épointée, c'est-à-dire une paramétrisation de la sphère moins un point dont les cœfficients de la première forme fondamentale vérifient $E = G$ et $F = 0$.

Rép.– Vrai, penser à la projection stéréographique et à son inverse.

10.– Soit $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ l'application de Gauss d'une surface de $\mathbb{R}^3$. Si l'image de N est une courbe alors la surface est plate ($\forall p \in S,\ K(p) = 0$).

Rép.– Vrai. Le rang de dN est donc inférieur ou égal à 1. Par conséquent le noyau est non trivial, il fournit une direction principale de courbure principale nulle, donc $K \equiv 0$.

Problème. – Soit $0 < b < a$ et $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$. On considère la courbe plane suivante, dite *roulette de Delaunay* :

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{b^2}{a}\displaystyle\int_0^t \frac{1}{(1+e\cos u)\sqrt{1-e^2\cos^2 u}}du \\ y(t) & = & b\sqrt{\dfrac{1-e\cos t}{1+e\cos t}} \end{array} \right. \end{array}$$

1) Déterminer les points réguliers de γ.

Rép.– On a

$$x'(t) = b\frac{\frac{b}{a}}{(1+e\cos t)\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}$$

et

$$y'(t) = b\frac{e\sin(t)}{(1+e\cos t)\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}$$

d'où

$$\|\gamma'(t)\|^2 = \left(\frac{b^2}{a^2} + e^2\sin^2 t\right)\frac{b^2}{(1+e\cos t)^2(1-e^2\cos^2 t)}.$$

Or $e^2 + \dfrac{b^2}{a^2} = 1$ donc

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\|^2 &= \left(1-e^2+e^2\sin^2 t\right)\frac{b^2}{(1+e\cos t)^2(1-e^2\cos^2 t)} \\ &= \left(1-e^2\cos^2 t\right)\frac{b^2}{(1+e\cos t)^2(1-e^2\cos^2 t)} \\ &= \frac{b^2}{(1+e\cos t)^2}. \end{aligned}$$

Tous les points sont donc réguliers.

2) Montrer que la fonction abscisse curviligne a pour expression

$$S(t) = \int_0^t \frac{b}{1+e\cos u}du$$

et déterminer la tangente unitaire $T(t)$ et la normale algébrique unitaire $N_{alg}(t)$ de γ en t.

Rép.– La formule donnée pour l'abscisse curviligne découle directement de la question précédente. D'autre part

$$T(t) := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\begin{pmatrix} \frac{b}{a} \\ e\sin t \end{pmatrix}$$

et

$$N_{alg}(t) := \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\begin{pmatrix} -y'(t) \\ x'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\begin{pmatrix} -e\sin t \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix}.$$

3) Montrer que

$$k_{alg}(t) = -\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\langle \frac{dN_{alg}(t)}{dt}, T(t)\rangle.$$

(On pourra reparamétrer γ par l'abscisse curviligne et utiliser les formules de Frenet).

Rép.– Notons $\widetilde{\gamma} = \gamma \circ S^{-1}$. La courbe $\widetilde{\gamma}$ est paramétrée par la l.a., on peut donc utiliser les formules de Frenet :

$$\frac{d(N_{alg}\circ S^{-1})}{ds}(s) = -\widetilde{k}_{alg}(s)T(S^{-1}(s))$$

où $\widetilde{k}_{alg}(s)$ est la courbure en s de $\widetilde{\gamma}$. On a donc

$$\widetilde{k}_{alg}(s) = -\langle \frac{d(N_{alg}\circ S^{-1})}{ds}(s), T(S^{-1}(s))\rangle$$

or, si $t = S^{-1}(s)$,

$$\frac{d(N_{alg}\circ S^{-1})}{ds}(s) = \frac{dN_{alg}(t)}{dt}\frac{dS^{-1}(s)}{ds} = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\frac{dN_{alg}(t)}{dt}$$

ainsi

$$\widetilde{k}_{alg}(s) = -\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\langle \frac{dN_{alg}(t)}{dt}, T(t)\rangle.$$

Bien sûr, par définition, $k_{alg}(t) = \widetilde{k}_{alg}(s)$.

4) Montrer que la courbure algébrique de γ en t est

$$k_{alg}(t) = \frac{1}{a}\frac{e\cos t}{1-e\cos t}.$$

Rép.– On a

$$\begin{aligned}
\frac{dN_{alg}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\right)\begin{pmatrix} -e\sin t \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} -e\sin t \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\right)\begin{pmatrix} -e\sin t \\ \frac{b}{a} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}}\begin{pmatrix} -e\cos t \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\langle \frac{dN_{alg}(t)}{dt}, T(t)\rangle &= \frac{1}{1-e^2\cos^2 t}\langle \begin{pmatrix} -e\cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{b}{a} \\ e\cos t \end{pmatrix}\rangle \\
&= -\frac{b}{a}\frac{e\cos t}{1-e^2\cos^2 t}.
\end{aligned}$$

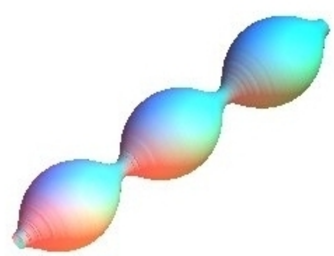
et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|\gamma'(t)\|}\langle \frac{dN_{alg}(t)}{dt}, T(t)\rangle &= -\left(\frac{1+e\cos t}{b}\right)\frac{b}{a}\frac{e\cos t}{1-e^2\cos^2 t} \\
&= -\frac{1}{a}\frac{e\cos t}{1-e\cos t}.
\end{aligned}$$

5) On considère la surface de révolution suivante, dite *surface de Delaunay* :

$$\begin{array}{rccl}
f: & \mathbb{R}\times[0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 & (t,v) & \longmapsto & (y(t)\cos v, y(t)\sin v, x(t))
\end{array}$$

Calculer la première forme fondamentale de f.



Une surface de Delaunay

Rép.– Un calcul direct montre que

$$E = \|\gamma'\|^2 = x'^2 + y'^2 = \frac{b^2}{(1+e\cos t)^2}, \quad F = 0, \quad G = y^2 = b^2\frac{1-e\cos t}{1+e\cos t}.$$

6) Montrer que les cœfficients de la seconde forme fondamentale sont donnés par

$$\mathcal{L} = -\|\gamma'\|^2 k_{alg}(t), \;\; \mathcal{M} = 0 \text{ et } \mathcal{N} = \frac{b}{a}\|\gamma'(t)\|$$

(au signe près dépendant du choix de la normale unitaire).

Rép.– Soit
$$n = \frac{1}{\|\gamma'\|}(-x'\cos v, -x'\sin v, y')$$
une normale unitaire. On a
$$\mathcal{L} = \langle n, f_{tt}\rangle = \frac{1}{\|\gamma'\|}\langle \begin{pmatrix} -x'\cos v \\ -x'\sin v \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y''\cos v \\ y''\sin v \\ x'' \end{pmatrix} \rangle = \frac{-x'y'' + y'x''}{\|\gamma'\|} = -\|\gamma'\|^2 k_{alg}(t).$$
Ainsi
$$\mathcal{L} = -\frac{b^2}{(1+e\cos t)^2}\frac{1}{a}\frac{e\cos t}{1-e\cos t}.$$
On a immédiatement
$$\mathcal{M} = \langle n, f_{tv}\rangle = 0.$$
Enfin
$$\mathcal{N} = \langle n, f_{vv}\rangle = \frac{1}{\|\gamma'\|}\langle \begin{pmatrix} -x'\cos v \\ -x'\sin v \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y\cos v \\ -y\sin v \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \frac{x'y}{\|\gamma'\|}$$
d'où
$$\mathcal{N} = \frac{b^3}{a}\frac{1}{\|\gamma'\|}\frac{1}{(1+e\cos t)^2} = \frac{b^2}{a}\frac{1}{1+e\cos t} = \frac{b}{a}\|\gamma'(t)\|.$$

7) Calculer les cœfficients de l'opérateur de Weingarten et déterminer la courbure de Gauss de f. Déterminer le lieu des points où la courbure de Gauss s'annule.

Rép.– De $W = I^{-1}.II$ on tire (au signe près dépendant du choix de la normale unitaire) :
$$W = \begin{pmatrix} -k_{alg}(t) & 0 \\ 0 & \dfrac{b\|\gamma'\|}{ay^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{a}\dfrac{e\cos t}{1-e\cos t} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a}\dfrac{1}{1-e\cos t} \end{pmatrix}.$$
Puis
$$K = det\, W = -\frac{1}{a^2}\frac{e\cos t}{(1-e\cos t)^2}.$$
Par conséquent, la courbure de Gauss s'annule sur
$$\{(t,v) \mid t \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z},\ v \in \mathbb{R}\}.$$

8) Montrer que la courbure moyenne de f est constante.

Rép.– La courbure moyenne est donnée par la formule

$$H = \frac{1}{2} Tr\ W$$

Avec l'expression obtenue à la question 7, on calcule immédiatement

$$H = \frac{1}{2a}.$$

La courbure moyenne est constante.