Université Claude Bernard Lyon 1

M1R – Géométrie : Courbes et surfaces

Examen final

Mardi 8 janvier 2013 - Durée 2 heures

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Il existe une paramétrisation régulière de la sphère épointée (la sphère moins un point) dont les coefficients de la première forme fondamentale vérifient $E = G = F$ en tout point.

2.– En tout point d'une surface réglée la courbure moyenne est négative ou nulle : $H \leq 0$.

3.– Il n'existe pas de surface paramétrée régulière pour laquelle $K = 1$ et $H = 0$ en tout point.

4.– Il n'existe pas de surface paramétrée régulière pour laquelle $K = 0$ et $H = 1$ en tout point.

5.– Soit $\gamma : I \longrightarrow S$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc et tracée sur une surface S. Si γ est à la fois une ligne de courbure et une courbe asymptotique de S, alors γ est une courbe plane.

6.– Soient $f_1,\ f_2 : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deux paramétrisations régulières isométriques, alors elles ont même opérateur de Weingarten.

7.– Si f est la paramétrisation régulière d'une surface de rotation alors, en tout point, l'opérateur de Weingarten de f est une rotation.

8.– Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière isométrique, alors l'image d'une portion de droite $D \cap \mathcal{U}$ est une portion de droite de $\mathbb{R}^3$.

9.– Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière isométrique alors l'aire de $f(\mathcal{U})$ est égale à l'aire de $\mathcal{U}$.

10.– Soient S le support d'une surface paramétrée régulière et $D \subset S$ un triangle géodésique [1]. Si la somme des angles intérieurs vaut π alors il existe un point de $p \in D$ où $K(p) = 0$.

Problème. – Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, $s \longmapsto (x(s), y(s), 0)$ une courbe plane C^∞ paramétrée par la longueur d'arc et soit

$$\begin{array}{rccc} f : & [a,b] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} f_1(u,v) = x(u) - vy'(u) \\ f_2(u,v) = y(u) + vx'(u) \\ f_3(u,v) = v \tan\theta \end{array} \right. \end{array}$$

où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1) Montrer que f est une surface réglée et déterminer la directrice et les génératrices.

2) Quel est le support de f dans le cas particulier où $[a,b] = [0, 2\pi]$ et $\gamma(s) = (\cos s, \sin s, 0)$?

3) On revient au cas général. Montrer que $E = \langle f_u, f_u \rangle = (1 - vk_{alg}(u))^2$ où k_{alg} désigne la courbure algébrique de γ.

4) Calculer la première forme fondamentale de f et en déduire que f est régulière aux points (u,v) où $vk_{alg}(u) \neq 1$.

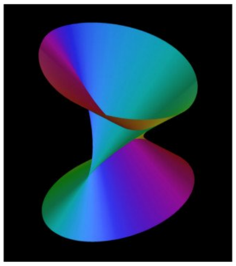
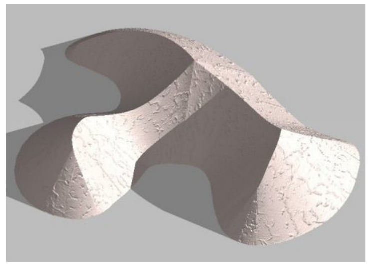
5) On note $\mathcal{U}$ l'ouvert $\{(u,v) \mid vk_{alg}(u) < 1\}$ et on suppose $(u,v) \in \mathcal{U}$:

a) Déterminer la normale unitaire $N(u,v)$.

b) Montrer que l'angle entre la normale $N(u,v)$ et la verticale vaut θ (pour cette raison, ces surfaces sont appelées des *surfaces d'égale pente*, elles

1. C'est-à-dire un domaine simple dont le bord est formé de trois arcs géodésiques.

permettent – entre autres – de modéliser les dunes ou les tas de sable saturés).


6) En utilisant la formule de Brioschi, démontrer qu'en tout point $(u, v) \in \mathcal{U}$ la courbure de Gauss K de f est nulle.

7) On suppose désormais que γ est birégulière et on pose :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \varphi(s) := \dfrac{1}{k_{alg}(s)}. \end{array}$$

Montrer que la courbe paramétrée $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\delta(u) := f(u, \varphi(u))$ est une courbe enveloppe de la famille des génératrices de f (une telle courbe est appelée l'*arête de rebroussement* de f).

8) Soient $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ la projection orthogonale et $\alpha := \pi \circ \delta$ la projection de la courbe δ. Montrer que α est la développée de γ c'est-à-dire que

$$\forall u \in [a,b], \quad \alpha(u) = \gamma(u) + \frac{1}{k(u)} n(u)$$

où k et n sont la courbure et la normale principales de γ.

9) Soit $g = \pi \circ f$ la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Montrer que

$$Aire(g_{|\mathcal{U}}) = \cos\theta . Aire(f_{|\mathcal{U}}).$$