Université Claude Bernard Lyon 1

M1R – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé de l'examen final du 8 janvier 2013

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Il existe une paramétrisation régulière de la sphère épointée (la sphère moins un point) dont les coefficients de la première forme fondamentale vérifient $E = G = F$ en tout point.

Rép.– Faux, on aurait $EG - F^2 = 0$ et la paramétrisation ne serait pas régulière.

2.– En tout point d'une surface réglée la courbure moyenne est négative ou nulle : $H \leq 0$.

Rép.– Faux, considérer le cylindre.

3.– Il n'existe pas de surface paramétrée régulière pour laquelle $K = 1$ et $H = 0$ en tout point.

Rép.– Vrai, d'après le cours, en tout point d'une surface paramétrée régulière on a $H^2 \geq K$.

4.– Il n'existe pas de surface paramétrée régulière pour laquelle $K = 0$ et $H = 1$ en tout point.

Rép.– Faux, un cylindre dont la base est un cercle de rayon 2 est un exemple d'une telle surface.

5.– Soit $\gamma : I \longrightarrow S$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc et tracée sur une surface S. Si γ est à la fois une ligne de courbure et une courbe asymptotique de S, alors γ est une courbe plane.

Rép.– Vrai, dans le trièdre de Darboux (T, V, n) on a

$$(n \circ \gamma)' = \frac{d(n \circ \gamma)}{ds} = -k_T T + \tau_g V.$$

Or γ est une ligne de courbure ssi $\tau_g = 0$ et γ est une courbe asymptotique ssi $k_T = 0$. Donc $(n \circ \gamma)' = 0$ ce qui signifie que le plan tangent à la surface est le même en tout point du support de γ, autrement dit γ est une courbe plane.

6.– Soient $f_1, f_2 : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deux paramétrisations régulières isométriques, alors elles ont même opérateur de Weingarten.

Rép.– Faux. Considérer l'exemple traité en cours du plan et du cylindre.

7.– Si f est la paramétrisation régulière d'une surface de rotation alors, en tout point, l'opérateur de Weingarten de f est une rotation.

Rép.– Faux, considérer les calculs déjà effectués en TD.

8.– Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière isométrique, alors l'image d'une portion de droite $D \cap \mathcal{U}$ est une portion de droite de $\mathbb{R}^3$.

Rép.– Faux. Une isométrie envoie les géodésiques de $\mathcal{U}$ sur des géodésiques de $f(\mathcal{U})$ qui ne sont pas nécessairement des géodésiques de $\mathbb{R}^3$. Considérer le cône par exemple.

9.– Soit $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière isométrique alors l'aire de $f(\mathcal{U})$ est égale à l'aire de $\mathcal{U}$.

Rép.– Vrai. En effet,

$$Aire(f(\mathcal{U})) = \int_{\mathcal{U}} d^2S = \int_{\mathcal{U}} \sqrt{EG - F^2} dudv = \int_{\mathcal{U}} dudv = Aire(\mathcal{U})$$

puisque $E = 1$, $G = 1$ et $F = 0$.

10.– Soient S le support d'une surface paramétrée régulière et $D \subset S$ un triangle géodésique [1]. Si la somme des angles intérieurs vaut π alors il existe

1. C'est-à-dire un domaine simple dont le bord est formé de trois arcs géodésiques.

un point de $p \in D$ où $K(p) = 0$.

Rép.– Vrai, le théorème de Gauss-Bonnet implique que $\int_D K d^2 S = 0$ et donc K s'annule nécessairement en un point au moins de D.

Problème. – Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, $s \longmapsto (x(s), y(s), 0)$ une courbe plane C^∞ paramétrée par la longueur d'arc et soit

$$\begin{array}{rccc} f: & [a,b] \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{l} f_1(u,v) = x(u) - v y'(u) \\ f_2(u,v) = y(u) + v x'(u) \\ f_3(u,v) = v \tan\theta \end{array} \right. \end{array}$$

où $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1) Montrer que f est une surface réglée et déterminer la directrice et les génératrices.

Rép.– On a $f(u, v) = \gamma(u) + v\beta(u)$ avec $\beta(u) := (-y'(u), x'(u), \tan\theta)$. Ainsi f est une surface réglée de directrice γ et les génératrices sont les droites $v \mapsto f(u_0, v)$.

ALESSANDRA : je n'ai pas fait les notions de directrice et de génératrice en cours, il faudra donc les faire en TD !

2) Quel est le support de f dans le cas particulier où $[a, b] = [0, 2\pi]$ et $\gamma(s) = (\cos s, \sin s, 0)$?

Rép.– Dans ce cas, on a

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} (1-v)\cos u \\ (1-v)\sin u \\ v\tan\theta \end{pmatrix}.$$

Ainsi le support de f est le cône de sommet $(0, 0, \tan\theta)$ et d'angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \theta$ (équation cartésienne : $\tan^2\theta(x^2 + y^2) = (z - \tan\theta)^2$).

3) On revient au cas général. Montrer que $E = \langle f_u, f_u \rangle = (1 - v k_{alg}(u))^2$ où k_{alg} désigne la courbure algébrique de γ.

Rép.– On a

$$f_u(u,v) = \left\{ \begin{array}{c} x'(u) - vy''(u) \\ y'(u) + vx''(u) \\ 0 \end{array} \right. \qquad f_v(u,v) = \left\{ \begin{array}{c} -y'(u) \\ x'(u) \\ \tan\theta \end{array} \right.$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} E & = & x'(u)^2 + y'(u)^2 + 2v(x''(u)y'(u) - x'(u)y''(u)) + v^2(x''(u)^2 + y''(u)^2) \\ & = & 1 - vk_{alg}(u) + v^2 k_{alg}^2(u) \\ & = & (1 - vk_{alg}(u))^2. \end{array}$$

car, puisque γ est paramétrée par la longueur d'arc, on a

$$k_{alg}(u)^2 = \|\gamma''(u)\|^2 = x''(u)^2 + y''(u)^2$$

mais aussi $k_{alg}(u) = x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u)$.

4) Calculer la première forme fondamentale de f et en déduire que f est régulière aux points (u,v) où $vk_{alg}(u) \neq 1$.

Rép.– On a

$$\begin{array}{rcl} F & = & v(x'(u)x''(u) + y'(u)y''(u)) \\ & = & \frac{1}{2}v(x'(u)^2 + y'(u)^2)' \\ & = & 0 \end{array}$$

et $G = 1 + \tan^2\theta$. D'où

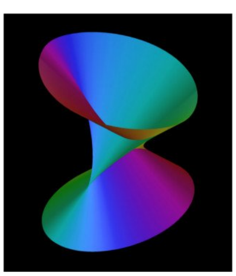
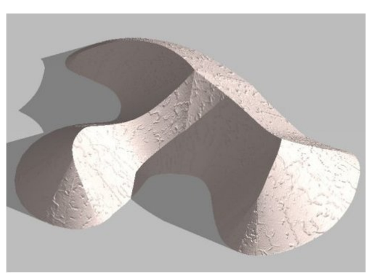
$$\|f_u \wedge f_v\|^2 = EG - F^2 = (1 + \tan^2\theta)(1 - vk_{alg}(u))^2.$$

Ainsi $\|f_u \wedge f_v\|^2 > 0$ si et seulement si $vk_{alg}(u) \neq 1$.

5) On note $\mathcal{U}$ l'ouvert $\{(u,v) \mid vk_{alg}(u) < 1\}$ et on suppose $(u,v) \in \mathcal{U}$:

a) Déterminer la normale unitaire $N(u,v)$.

b) Montrer que l'angle entre la normale $N(u,v)$ et la verticale vaut θ (pour cette raison, ces surfaces sont appelées des *surfaces d'égale pente*, elles permettent – entre autres – de modéliser les dunes ou les tas de sable saturés).


Rép.– a) On a

$$\begin{aligned}
N &= \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}(1-vk_{alg}(u))} \begin{pmatrix} \tan\theta(y'(u)-vx''(u)) \\ -\tan\theta(x'(u)-vy''(u)) \\ x'(u)^2+y'(u)^2-v(x'(u)y''(u)-x''(u)y'(u)) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}(1-vk_{alg}(u))} \begin{pmatrix} \tan\theta(y'(u)-vx''(u)) \\ -\tan\theta(x'(u)-vy''(u)) \\ 1-vk_{alg}(u) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Ainsi

$$\langle N, e_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \cos\theta.$$

6) En utilisant la formule de Brioschi, démontrer qu'en tout point $(u,v) \in \mathcal{U}$ la courbure de Gauss K de f est nulle.

Rép.– On a :

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}G_{uu}+F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v \\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{(EG-F^2)^2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}$$

et, puisque $E=(1-vk_{alg}(u))^2$, $F=0$ et $G=1+\tan^2\theta$,

$$K = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} & \frac{1}{2}E_u & -\frac{1}{2}E_v \\ 0 & E & F \\ 0 & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & 0 \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ 0 & F & G \end{vmatrix}}{(EG-F^2)^2}$$

soit encore

$$K = \frac{G}{(EG-F^2)^2}\left(-\frac{1}{2}E_{vv}E + \frac{1}{4}E_v^2\right).$$

Or $E_v = -2k_{alg}(u)(1-vk_{alg}(u))$ et $E_{vv} = 2k_{alg}^2(u)$ d'où $-\frac{1}{2}E_{vv}E+\frac{1}{4}E_v^2 = 0$.

7) On suppose désormais que γ est birégulière et on pose :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \varphi(s) := \dfrac{1}{k_{alg}(s)}. \end{array}$$

Montrer que la courbe paramétrée $\delta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\delta(u) := f(u, \varphi(u))$ est une courbe enveloppe de la famille des génératrices de f (une telle courbe est appelée l'*arête de rebroussement* de f).

Rép.– Notons d'abord que γ étant birégulière, sa courbure algébrique ne s'annule jamais et donc δ est bien définie. On a

$$\delta(u) = \begin{pmatrix} x(u) - \varphi(u)y'(u) \\ y(u) + \varphi(u)x'(u) \\ \varphi(u)\tan\theta \end{pmatrix}$$

d'où

$$\delta'(u) = \begin{pmatrix} x'(u) - \varphi(u)y''(u) \\ y'(u) + \varphi(u)x''(u) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\varphi'(u)y'(u) \\ \varphi'(u)x'(u) \\ \varphi'(u)\tan\theta \end{pmatrix}$$

Ainsi $\delta'(u) = f_u(u, \varphi(u)) + \varphi'(u)\beta(u)$. Or $\|f_u(u,v)\| = |1 - vk_{alg}(u)|$ donc $\|f_u(u, \varphi(u))\| = 0$ i. e. $f_u(u, \varphi(u)) = 0$. Finalement, pour tout $u \in [a,b]$, on a $\delta'(u) \in \mathbb{R}\beta(u)$. Comme $\delta(u)$ est un point de la génératrice $v \longmapsto f(u,v)$, on en déduit que δ est une courbe enveloppe de la famille des génératrices de f.

8) Soient $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ la projection orthogonale et $\alpha := \pi \circ \delta$ la projection de la courbe δ. Montrer que α est la développée de γ c'est-à-dire que

$$\forall u \in [a,b], \quad \alpha(u) = \gamma(u) + \frac{1}{k(u)} n(u)$$

où k et n sont la courbure et la normale principales de γ.

Rép.– D'une part, notons que $k(u)^{-1}n(u) = k_{alg}(u)^{-1}n_{alg}(u)$ où $n_{alg} = (-y'(u), x'(u))$ ainsi

$$\gamma(u) + k(u)n(u) = \begin{pmatrix} x(u) - k_{alg}(u)^{-1}y'(u) \\ y(u) + k_{alg}(u)^{-1}x'(u) \end{pmatrix}.$$

D'autre part

$$\alpha(u) = \pi \circ \delta(u) = \begin{pmatrix} x(u) - \varphi(u)y'(u) \\ y(u) + \varphi(u)x'(u) \end{pmatrix}$$

avec $\varphi(u) = k_{alg}(u)^{-1}$.

9) Soit $g = \pi \circ f$ la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Montrer que

$$Aire(g_{|\mathcal{U}}) = \cos\theta . Aire(f_{|\mathcal{U}}).$$

Rép.– On a

$$g(u,v) = \begin{pmatrix} x(u) - vy'(u) \\ y(u) + vx'(u) \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où

$$E_g = (1 - vk_{alg}(u))^2, \quad F_g = 0, \quad G_g = 1$$

où E_g, F_g et G_g désignent les coefficients de la première forme fondamentale de g. Ainsi

$$E_g G_g - F_g^2 = (1 - vk_{alg}(u))^2 = \frac{EG - F^2}{1 + \tan^2\theta}$$

et par conséquent, pour les éléments d'aire :

$$\sqrt{E_g G_g - F_g^2} = \cos\theta \sqrt{EG - F^2}.$$