Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé de l'examen final du 6 janvier 2015

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Soit $\bar{\gamma} : I \longrightarrow S$ une courbe asymptotique. Alors la composante normale de $\bar{\gamma}''$ est nulle.

Rép.– Vrai, c'est même une équivalence. Soit $n : S \longrightarrow \mathbb{S}^2$ une normale unitaire à S. De $\langle \bar{\gamma}', n \circ \bar{\gamma} \rangle = 0$, on déduit

$$\langle \bar{\gamma}'', n \circ \bar{\gamma} \rangle + \langle \bar{\gamma}', dn(\bar{\gamma}') \rangle = 0.$$

Ainsi $\langle \bar{\gamma}'', n \circ \bar{\gamma} \rangle = 0$ si et seulement si $-II(\bar{\gamma}', \bar{\gamma}') = \langle \bar{\gamma}', dn(\bar{\gamma}') \rangle = 0$, i. e. $\bar{\gamma}$ est une ligne asymptotique pour S.

2.– Soit $\bar{\gamma} : I \longrightarrow S$ une géodésique. S'il existe $s_1 < s_2$ tels que $\bar{\gamma}(s_1) = \bar{\gamma}(s_2)$ alors $\bar{\gamma}$ est périodique et $s_2 - s_1$ est un multiple de la période.

Rép.– Faux. Penser aux géodésiques des cônes : elles peuvent s'auto-intersecter sans être périodiques pour autant.

3.– Soit $\bar{\gamma} : I \longrightarrow S$ une ligne de courbure. S'il existe $s_1 < s_2$ tels que $\bar{\gamma}(s_1) = \bar{\gamma}(s_2)$ alors $\bar{\gamma}$ est périodique et $s_2 - s_1$ est un multiple de la période.

Rép.– Faux. Penser au plan ou à la sphère. Sur de telles surfaces, toute courbe est une ligne de courbure.

4.– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ le support d'une surface paramétrée régulière et P un plan de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $P \cap S$ est le support d'une courbe $\bar{\gamma}$ paramétrée par la longueur d'arc. Si en tout point $p \in P \cap S$ les plans P et T_pS sont orthogonaux alors $\bar{\gamma}$ est une géodésique de S.

Rép.– Vrai. Soit $N(s)$ une normale unitaire à S en $\bar{\gamma}(s)$. Puisque les plans P et T_pS sont orthogonaux, $(N(s), \bar{\gamma}'(s))$ est une base de T_pS. Puisque la courbe $\bar{\gamma}$ est plane et que $\langle \bar{\gamma}'(s), \bar{\gamma}''(s) \rangle = 0$ on a nécessairement $\bar{\gamma}''(s) \in Vect(N(s))$. Et donc $(\bar{\gamma}''(s))^T = 0$.

5.– On suppose que les coefficients de la première forme fondamentale d'une paramétrisation $(u, v) \longrightarrow f(u, v)$ sont $E(u, v) = 1$, $G(u, v) = \varphi(u)$ et $F(u, v) = 0$ avec pour tout u, $1 > \varphi(u) > 0$ et $\varphi''(u) < 0$. Alors la courbure de Gauss de la surface est strictement positive.

Rép.– Vrai. La formule de Brioschi montre que $K = \dfrac{1}{2\varphi^2}(\dfrac{1}{2}\varphi'^2 - \varphi\varphi'')$. Puisque $\varphi''(u) < 0$ pour tout u, on a donc $K > 0$ en tout point.

6.– Soit $(u, v) \longmapsto f(u, v)$ une paramétrisation régulière. On suppose que les coefficients de la seconde forme fondamentale valent $\mathcal{L}(u, v) = 1$ et $\mathcal{M}(u, v) = \mathcal{N}(u, v) = \varphi(u)$ avec pour tout u, $1 > \varphi(u) > 0$ et $\varphi''(u) < 0$. Alors la courbure moyenne H ne s'annule en aucun point.

Rép.– Vrai. On a

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2} = \frac{\varphi - \varphi^2}{EG - F^2} > 0.$$

Comme $H^2 \geq K$, on en déduit que H ne peut s'annuler.

7.– Soit $f :]0, 1[^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une paramétrisation régulière isométrique et $\phi :]0, 1[^2 \longrightarrow]0, 1[^2$ telle que $\phi(u, v) = (v, u)$. Alors $f \circ \phi :]0, 1[^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation régulière isométrique.

Rép.– Vrai. En effet, les cœfficients de la première forme fondamentale de f sont $E = G = 1$ et $F = 0$ et l'effet de ϕ est de permuter E et G.

8.– Soit $f_1, f_2 :]0, 1[^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ deux paramétrisations régulières isométriques entre elles et $\phi :]0, 1[^2 \longrightarrow]0, 1[^2$ telle que $\phi(u, v) = (v, u)$. Alors $f_1 \circ \phi$ et f_2 sont isométriques.

Rép.– Faux. Puisque f_1 et f_2 sont isométriques on a

$$E_1 = E_2, \;\; F_1 = F_2, \;\; G_1 = G_2$$

avec des notations évidentes. Les cœfficients de la première forme fondamentale de $f_3 = f_1 \circ \phi$ sont $E_3 = G_1$, $F_3 = F_1$ et $G_3 = E_1$ donc en général $E_3 \neq E_2$ et $G_3 \neq G_2$.

9.– Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow S$ une surface paramétrée régulière, injective et plate (i. e. dont la courbure de Gauss est identiquement nulle) et $\gamma : I \longrightarrow \mathcal{U}$ une courbe C^∞ fermée simple. Alors l'intégrale de la courbure géodésique de $\bar{\gamma} = f \circ \gamma$ vaut $\int_{\bar{\gamma}} k_g ds = 2\pi$.

Rép.– Vrai. Par le théorème de Jordan-Schönflies, γ borde un domaine D homéomorphe à un disque, son image par f est homéomorphe à un disque dont le bord est l'image de $\bar{\gamma}$. Le théorème de Gauss-Bonnet s'écrit

$$\int_{\bar{\gamma}} k_g ds + \int_{f(D)} K d^2 S = 2\pi$$

et puisque $K \equiv 0$, on obtient $\int_{\bar{\gamma}} k_g ds = 2\pi$.

10.– L'ensemble $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 2z^2 = 0\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Rép.– Faux. L'ensemble S est un cône.

Problème. – Soit $\alpha : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière C^∞ paramétrée par la longueur d'arc et soit f la surface paramétrée définie par

$$\begin{array}{rccc} f : & [0, L] \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & \alpha(u) + r(\cos(v) n(u) + \sin(v) b(u)). \end{array}$$

où n et b sont la normale principale et la binormale de α et $r > 0$. Une telle surface est dite *tubulaire de courbe centrale* α *et de rayon* r.

1) On note $t = \alpha'$, k la courbure principale de α et τ sa torsion.

i) Montrer que

$$\forall (u, v) \in [0, L] \times [0, 2\pi], \quad f_u(u, v) = (1 - rk(u) \cos v) t(u) + \tau(u) f_v(u, v).$$

ii) Déterminer les coefficients E, F et G de la première forme fondamentale de f.

iii) Montrer que si r est suffisamment petit, alors f est surface régulière.

iv) Déterminer une normale unitaire $N(u, v)$ aux points (u, v) où f est régulière.

Rép.– i) On a

$$\begin{aligned} f_u(u, v) &= \alpha'(u) + r((-k(u) t(u) + \tau(u) b(u)) \cos v - \tau(u) n(u) \sin v) \\ &= (1 - rk(u) \cos v) t(u) + r\tau(u)(\cos\theta \, b(u) - \sin v \, n(u)) \end{aligned}$$

et

$$f_v(u,v) = -r\sin v\ n(u) + r\cos v\ b(u).$$

Ainsi

$$f_u(u,v) = (1 - rk(u)\cos v)t(u) + \tau(u) f_v(u,v).$$

ii) Le calcul des cœfficients E, F et G est quasi-immédiat grâce à la formule du point i).

$$\begin{array}{rcl} E & = & (1 - rk(u)\cos v)^2 + r^2\tau^2(u) \\ F & = & r^2\tau(u) \\ G & = & r^2. \end{array}$$

iii) Ainsi

$$EG - F^2 = r^2(1 - rk(u)\cos v)^2.$$

Soit $k_{max} = \max_{u\in[0,L]} k(u)$. Si $rk_{max} < 1$ alors $EG - F^2 > 0$ en tout point de $[0,L]\times[0,2\pi]$ et f est régulière.
iv) On a $f_u \wedge f_v = (1 - rk\cos v)t \wedge \tau f_v$. Or

$$\begin{array}{rcl} t \wedge f_v & = & -r\sin v\ t\wedge n + r\cos v\ t \wedge b \\ & = & -r\sin v\ b - r\cos v\ n \end{array}$$

Par conséquent

$$N(u,v) = \frac{f_u \wedge f_v}{\|f_u \wedge f_v\|} = -(\cos v\ n + \sin v\ b).$$

2) On suppose désormais que r est choisi suffisamment petit pour que f soit régulière en tout point. Montrer que l'aire de $f([0,L]\times[0,2\pi])$ ne dépend que de r et de la longueur de α.

Rép.– On a

$$\begin{array}{rcl} Aire(f) & = & \displaystyle\int_{[0,L]\times[0,2\pi]} \sqrt{EG - F^2}dudv \\ & = & \displaystyle\int_{[0,L]\times[0,2\pi]} r(1 - rk(u)\cos v)dudv \\ & = & \displaystyle\int_{[0,L]\times[0,2\pi]} rdudv \end{array}$$

car $\int_0^{2\pi}\cos v\ dv = 0$. Ainsi $Aire(f) = 2\pi Lr$.

3) i) Déterminer les coefficients $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de la seconde forme fondamentale de f en fonction de k, τ, r et v.

ii) En déduire la courbure de Gauss K de f en tout point.

Rép.– i) On a

$$\begin{array}{rcl} f_{vv} & = & -(r\cos v\ n + r\sin v\ b) = rN, \\ f_{uv} & = & -r\sin v(-kt+\tau b) + r\cos v(-\tau n) = rk\sin v\ t + r\tau N \\ f_{uu} & = & -rk'\cos v\ t + (1-rk\cos v)kn + \tau' f_v + \tau f_{vu}. \end{array}$$

Ainsi

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{N} & = & \langle f_{vv}, N\rangle = \langle rN, N\rangle = r \\ \mathcal{M} & = & \langle f_{uv}, N\rangle = r\tau \\ \mathcal{L} & = & \langle f_{uu}, N\rangle = \langle (1-rk\cos v)kn + \tau f_{vu}, N\rangle \\ & = & -k\cos v(1-rk\cos v) + r\tau^2. \end{array}$$

ii) On a

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N}-\mathcal{M}^2}{EG-F^2} = \frac{-rk\cos v(1-rk\cos v)}{r^2(1-rk\cos v)^2} = \frac{-k\cos v}{r(1-rk\cos v)}.$$

4) i) Montrer que pour tout $u \in [0, L]$, $v \mapsto f(u,v)$ est une ligne de courbure.

ii) En déduire les directions et les courbures principales de f et déterminer la courbure moyenne H.

iii) Écrire la matrice A de l'opérateur de Weingarten dans la base $(t, \frac{1}{r}f_v)$.

Rép.– i) On a

$$N_v = \sin v\ n - \cos v\ b = -\frac{1}{r}f_v$$

ainsi $v \longrightarrow f(u,v)$ est une ligne de courbure et $k_1 = -\frac{1}{r}$ est une courbure principale. Les directions principales étant orthogonale, la droite $vect(t)$ donne nécessairement l'autre direction principale.

ii) Puisque $K = k_1k_2$, nécessairement $k_2 = \frac{k\cos v}{1-rk\cos v}$ et

$$H = \frac{k_1+k_2}{2} = -\frac{1}{r} + \frac{k\cos v}{1-rk\cos v}$$

iii) La base $(t, \frac{1}{r}f_v)$ étant constituée de vecteurs propres de l'opérateur de Weingarten, on a :

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{k\cos v}{1-rk\cos v} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{r} \end{pmatrix}.$$

5) Donner l'expression du réseau des lignes de courbures orthogonales aux lignes $v \mapsto f(u,v)$. On pourra s'aider de la fonction $\Psi : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Psi(w) := \int_0^w -\tau(s)ds.$$

Montrer que pour tout $u \in [0, L]$, la courbe $w \longrightarrow \gamma_u(w) := f(u + w, \Psi(w))$ est une ligne de courbure.

Rép.– On cherche une ligne de courbure sous la forme $w \longrightarrow f(u(w), v(w))$. On a

$$\begin{array}{rcl} f(u(w), v(w)) & = & u'(w).f_u(u(w), v(w)) + v'(w).f_v(u(w), v(w)) \\ & = & (1 - rk(u(w)) \cos v(w))t(u(w)) + \tau(u(w))f_v(u(w), v(w)) + v(w)f_v(u(w), v(w)) \end{array}$$

Ainsi $f(u(w), v(w))$ est proportionnel à t si $v(w) := \Psi(w)$. On obtient alors

$$f(u(w), \Psi(w)) = (1 - rk(u(w)) \cos \Psi(w))t(u(w)).$$

Pour la fonction u, on peut choisir $u(w) = u_0 + w$.

6) i) Montrer que pour tout $u \in [0, L]$, $v \longrightarrow f(u, v)$ est une géodésique.

ii) Montrer que $u \mapsto f(u, v)$ est une géodésique si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{ll} -k' \cos v + k\tau \sin v = 0 & (1) \\ r\tau' - (1 - rk \cos v)k \sin v = 0 & (2) \end{array} \right.$$

iii) Donner un exemple de choix de courbe non plane α pour laquelle il y ait au moins une courbe $u \mapsto f(u, v)$ qui soit une géodésique.

iv) Montrer que si $u \mapsto f(u, v)$ est une géodésique, alors il existe $Cte \in \mathbb{R}$ telle que

$$-2k \cos v + rk^2 \cos^2 v + r\tau^2 = Cte.$$

v) Montrer que les courbes $u \mapsto f(u, \frac{\pi}{2})$ et $u \mapsto f(u, \frac{3\pi}{2})$ ne sont jamais des géodésiques.

Rép.– i) En effet $f_{vv} = rN$ donc $(f_{vv})^T = 0$.

ii) On a

$$\begin{array}{rcl} f_{uu} & = & -rk' \cos v \; t + (1 - rk \cos v)kn + \tau' f_v + \tau f_{vu} \\ & = & -rk' \cos v \; t + (1 - rk \cos v)kn + \tau' f_v + rk\tau \sin v \; t + r\tau^2 N \end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{rcl} \langle f_{uu}, t \rangle & = & -rk' \cos v + rk\tau \sin v \\ \langle f_{uu}, f_v \rangle & = & r^2\tau' + (1 - rk \cos v)k\langle n, f_v \rangle \\ & = & r^2\tau' - r(1 - rk \cos v)k \sin v \end{array}$$

Ainsi $(f_{uu})^T = 0$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{ll} -k' \cos v + k\tau \sin v = 0 & (1) \\ r\tau' - (1 - rk \cos v)k \sin v = 0 & (2) \end{array} \right.$$

iii) Si α est une hélice circulaire alors k et τ sont constants et non nuls. Les équations (1) et (2) montrent alors que les courbes $u \mapsto f(u,0)$ et $u \mapsto f(u,\pi)$ sont des géodésiques.
iv) L'équation (2) montre que

$$k \sin v = \frac{r\tau'}{1 - rk\cos v}$$

En injectant $\tau \times (2)$ dans (1) on obtient donc

$$-k' \cos v + \frac{r\tau\tau'}{1 - rk\cos v} = 0.$$

Soit encore

$$-k' \cos v + rkk' \cos^2 v + r\tau\tau' = 0$$

ce qui s'intègre en

$$-2k \cos v + rk^2 \cos^2 v + r\tau^2 = Cte.$$

iv) Une courbe $u \mapsto f(u,v)$ est une géodésique si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcll} -2k\cos v + rk^2\cos^2 v + r\tau^2 & = & Cte & (1') \\ r\tau' - (1 - rk\cos v)k\sin v & = & 0 & (2) \end{array} \right.$$

Ainsi les courbes $u \mapsto f(u, \frac{\pi}{2})$ et $u \mapsto f(u, \frac{3\pi}{2})$ sont des géodésiques si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcll} r\tau^2 & = & Cte & (1') \\ r\tau' \pm k & = & 0 & (2) \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcll} \tau & = & Cte & (1') \\ k & = & 0 & (2) \end{array} \right.$$

Ceci est impossible car α est supposée birégulière, autrement dit $k \neq 0$ en tout point.

7) On suppose désormais que α est une courbe plane fermée simple.

i) Soit $R = \{(u,v) \in [0,L] \times [0,2\pi] \mid K(u,v) \geq 0\}$. Déterminer R puis donner une expression de l'aire de $f(R)$ en fonction de L, r et k.

ii) Montrer que l'aire de $f(R)$ ne dépend en fait que de r et de L.

Rép.– i) Il est immédiat que $R = [0,L] \times [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. On a

$$\begin{array}{rcl} A(f(R)) & = & \displaystyle\int_R d^2S \\ & = & \displaystyle\int_R \sqrt{EG - F^2}\,dudv \\ & = & \displaystyle\int_R r(1 - rk(u)\cos v)dudv \\ & = & \displaystyle\pi L r + 2r^2 \int_0^L k(u)du. \end{array}$$

ii) On applique le théorème des tangentes tournantes pour obtenir :

$$\int_0^L k_{alg}(s)ds = \pm 2\pi$$

où k_{alg} est la courbure algébrique de α. Comme α est birégulière, k_{alg} garde un signe constant. Donc

$$\int_0^L k(u)du = \left|\int_0^L k_{alg}(u)du\right| = 2\pi.$$

Au bilan

$$A(f(R)) = \pi Lr + 4\pi r^2.$$

8) On suppose maintenant que α est un cercle. Soient $0 \leq s_1 < s_2 < L$. On pose $D = [s_1, s_2] \times [0, 2\pi]$ et $E = [s_1, s_2] \times [0, \pi]$.

i) Montrer que $\partial f(\partial D)$ est l'une union de quatre supports de courbes géodésiques et que $\partial f(E)$ est une union de deux supports de courbes géodésiques.

ii) Calculer

$$\int_D K d^2 S$$

directement puis au moyen du théorème de Gauss-Bonnet.

iii) Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de Gauss-Bonnet, tel qu'il est énoncé dans le cours, pour calculer $\int_E K d^2 S$?

Rép.– i) Les courbes $v \mapsto f(u, v)$ sont des géodésiques d'après 6.i. Les courbes $u \mapsto f(u, 0)$ et $u \mapsto f(u, \pi)$ sont des géodésiques car elles satisfont aux équations du 6.ii (k est constant et $\tau = 0$).
ii) On a d'une part

$$\int_D K d^2 S = \int_D -k \cos v \; du dv = -k(s_2 - s_1) \int_0^\pi \cos v \; dv = 0.$$

D'autre part, la formule de Gauss-Bonnet s'énonce

$$\int_{\partial D} k_g ds + \int_D K d^2 S + \sum_{i=1}^4 \theta_i = 2\pi.$$

Notons γ_1,...γ_4 les courbes "évidentes" qui définissent le bord. Pour chacune d'entre elles la courbure géodésique est nulle d'après la question précédente. Puisque $F = r^2\tau \equiv 0$, les courbes s'intersectent en des angles extérieurs θ_i qui sont droits. La formule de Gauss-Bonnet s'écrit donc ici

$$0 + \int_D K d^2 S + 4 \times \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

soit encore

$$\int_D K d^2 S = 0.$$

iii) Le domaine $f(E)$ n'est pas simple. Il est homéomorphe à un anneau et non à un disque. La formule de Gauss-Bonnet, telle qu'elle est énoncée dans le cours, ne s'applique pas. Notons d'ailleurs que si l'on appliquait malgré tout cette formule on obtiendrait

$$\begin{aligned}\int_E K d^2 S &= 2\pi - \int_{\partial E} k_g ds \\ &= 2\pi - 0\end{aligned} .$$

Cette valeur est erronée. Un calcul direct montre en effet que

$$\int_E K d^2 S = 0.$$