Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé de l'examen final du 6 janvier 2017

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Soient S une sous-variété de dimension deux, n un champ de vecteurs normaux unitaires et $\gamma : I \longrightarrow S$ une ligne de courbure birégulière. On suppose que le support de γ est contenu dans un plan. Alors l'angle entre la normale principale de γ et n est constant le long de la courbe.

Rép.– Vrai. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que la ligne de courbure est paramétrée par la longueur d'arc. Comme dans le cours, on note $N = n \circ \gamma$ et N_{princ} la normale principale de la courbe plane γ. On a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\left(\langle N_{princ}(s), N(s)\rangle\right) &= \langle N'_{princ}(s), N(s)\rangle + \langle N_{princ}(s), N'(s)\rangle \\
&= \langle -k(s)T(s), N(s)\rangle + \langle N_{princ}(s), dn(T(s))\rangle \\
&= \langle -k(s)T(s), N(s)\rangle + \langle N_{princ}(s), -\lambda(s)T(s)\rangle \\
&= 0 + 0.
\end{aligned}$$

2.– Même énoncé en remplaçant "ligne de courbure" par "géodésique".

Rép.– Vrai. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que la géodésique est paramétrée par la longueur d'arc. Par définition d'une géodésique $\gamma''(s) = \alpha(s)N(s)$ où $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Or $\gamma''(s) = T'(s) = k(s)N_{princ}(s)$ d'après les relations de Frenet. Ainsi $N_{princ}(s) = \pm N(s)$ et l'angle entre la normale principale de γ et n est évidemment constant le long de la courbe. Notez que le caractère planaire de la courbe γ n'intervient pas dans le raisonnement.

3.– Même énoncé en remplaçant par "courbe asymptotique".

Rép.– Vrai. Si γ est une courbe asymptote alors la courbure normale dans la direction de sa tangente est nulle. La relation de Meunier s'écrit donc

$$0 = \langle N_{princ}(s), N(s) \rangle k(s).$$

Puisque γ est birégulière, $k(s) \neq 0$. C'est donc que $\langle N_{princ}(s), N(s) \rangle = 0$ et l'angle entre la normale principale de γ et n est évidemment constant le long de la courbe. Notez que le caractère planaire de la courbe γ n'intervient pas dans le raisonnement.

4.– Soit $f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $(u, v) \longmapsto (x(u), y(u), v)$ où $u \mapsto (x(u), y(u))$ est une courbe birégulière γ paramétrée par la longueur d'arc. La courbure de Gauss de f est égale à la courbure algébrique de γ.

Rép.– Faux. On a $f_u = (x', y', 0)$, $f_v = (0, 0, 1)$, $n = (y', -x', 0)$ puis $\mathcal{L} = y'x'' - x'y''$, $\mathcal{M} = 0$, $\mathcal{N} = 0$ et $\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2 = 0$, $K = 0$. Or la courbe γ étant birégulière, sa courbure n'est jamais nulle.

5.– Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la sous-variété de dimension deux définie par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - x^2 = 0\}$. Sa courbure de Gauss est nulle en tout point.

Rép.– Vrai. Il s'agit d'un cylindre parabolique qu'on peut paramétrer par $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(u, v) \longmapsto (x(u), y(u), v)$ avec $x(u) = u$ et $y(u) = u^2$. Le calcul effectué à la question précédente montre que $K = 0$ en tout point.

6.– Pour toute courbe $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ birégulière paramétrée par la longueur d'arc on définit $f_\gamma : I \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$f_\gamma(u, v) = \gamma(u) + \cos v \; N(u) + \sin v \; B(u)$$

où N est la normale principale de γ et B sa binormale. On suppose que $\gamma_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\gamma_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sont birégulière paramétrée par la longueur d'arc avec une courbure principale plus petite que 1. Alors f_{γ_1} et f_{γ_2} sont isométriques.

Rép.– Faux. En effet

$$\begin{aligned} f_u(u, v) &= T(u) + \cos v \; (-k(u)T(u) + \tau(u)B(u)) - \sin v \; \tau(u)B(u) \\ &= (1 - k(u)\cos v)T(u) - \sin v \; \tau(u)N(u) + \cos v \; \tau(u)B(u) \end{aligned}$$

et

$$f_v(u, v) = -\sin v \; N(u) + \cos v \; B(u)$$

d'où

$$\|f_u\|^2 = (1 - k\cos v)^2 + \tau^2(u), \quad \langle f_u, f_v\rangle = \tau, \quad \|f_v\|^2 = 1$$

Pour que f_{γ_1} et f_{γ_2} soient isométriques il faudrait en outre que $k_{\gamma_1} = k_{\gamma_2}$ et $\tau_{\gamma_1} = \tau_{\gamma_2}$. Notez que l'hypothèse sur la courbure principale n'a pas servi ici.

7.– On garde les hypothèses de la question 6. Alors $Aire(f_{\gamma_1}) = Aire(f_{\gamma_2})$.

Rép.– Vrai. On a

$$d^2S = \sqrt{EG - F^2}\, dudv = (1 - k(u)\cos v)dudv$$

d'où

$$\begin{aligned} Aire(f_\gamma) &= \int_I \int_0^{2\pi} 1 - k(u)\cos v dv du \\ &= \int_I [v - k(u)\sin v]_0^{2\pi} du \\ &= \int_I 2\pi du = 2\pi Long(I) \end{aligned}$$

Ainsi $Aire(f_\gamma)$ ne dépend pas de γ.

8.– En tout point non ombilical d'une surface minimale les tangentes aux lignes de courbures sont les bissectrices des tangentes aux lignes asymptotiques.

Rép.– Vrai. Notons λ_1 et λ_2 les courbures principales en un point non ombilical (donc $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Puisque $H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ et que la surface est minimale, c'est que l'on a $\lambda_1 = -\lambda_2$. La formule d'Euler pour les courbures s'écrit

$$k(\theta) = \lambda_1(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

Les directions de courbures sont données par les angles $\theta = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Cherchons les directions asymptotiques c'est-à-dire à résoudre l'équation $k(\theta) = 0$. Puisque $\lambda_1 \neq 0$ (sinon $\lambda_1 = -\lambda_2$ entraînerait que le point est ombilical) c'est que $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$. Il s'en suit les valeurs $\theta = \pi/4 + k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Les tangentes aux lignes de courbures sont donc les bissectrices des tangentes aux lignes asymptotiques.

9.– L'ensemble $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 - (y + z)^3 = 0\}$ est une sous-variété de dimension deux de $\mathbb{R}^3$.

Rép.– Vrai. Certes, l'application $h(x, y, z) = x^3 - (y + z)^3$ n'est pas une submersion mais cela ne signifie pas pour autant que $S = h^{-1}(0)$ n'est pas une sous-variété. Ici

$$x^3 - (y + z)^3 = 0 \iff x^3 = (y + z)^3 \iff x = y + z.$$

Ainsi S est un plan, c'est donc une sous-variété de dimension deux.

10.– Soit S la sous-variété définie par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^6 + z^8 = 1\}$. Il existe un point $p \in S$ où le vecteur $(0, 0, 1)$ est un vecteur directeur de la droite normale à S en p.

Rép.– Vrai. L'application $h(x, y, z) = x^4 + y^6 + z^8$ est une submersion pour $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ ce qui implique que $S = h^{-1}(1)$ est une sous variété de dimension deux de $\mathbb{R}^3$ et qu'en tout point $(x, y, z) \in S$, $grad_{(x,y,z)}h = (4x^3, 6y^5, 8z^7)$ est un vecteur normal. Notons que $p = (0, 0, 1)$ est un point de S puisque $h(0, 0, 1) = 1$. Un vecteur normal en p est donc donné par

$$grad_p h = (0, 0, 7).$$

Le vecteur $(0, 0, 1)$ qui lui est proportionnel est donc aussi un vecteur normal en ce point.

Problème. – On note $\mathbb{S}^2(r)$ la sphère de rayon r et de centre l'origine de $\mathbb{R}^3$. On suppose que $\mathbb{S}^2(r)$ est orientée par la normale sortante. Le but de ce problème est de montrer qu'il n'existe pas de champ de vecteurs tangents à $\mathbb{S}^2(r)$ partout non nul.

1) On pose $\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ et on note

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^2(r) \subset \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & (f_1(u, v), f_2(u, v), f_3(u, v)) \end{array}$$

une paramétrisation régulière d'une portion de $\mathbb{S}^2(r)$ qui préserve l'orientation.

i) Montrer que $f^*(xdy \wedge dz) = f_1 df_2 \wedge df_3$.

ii) Montrer ensuite que

$$f^*(xdy \wedge dz) = f_1 \left(\frac{\partial f_2}{\partial u} \frac{\partial f_3}{\partial v} - \frac{\partial f_3}{\partial u} \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) du \wedge dv$$

iii) En déduire que

$$f^*\omega = \langle f, f_u \wedge f_v \rangle du \wedge dv$$

iv) Montrer que

$$f^*\omega = r \| f_u \wedge f_v \| du \wedge dv$$

(on prendra soin des questions d'orientation).

v) Montrer que

$$\int_{\mathbb{S}^2(r)} \omega = 4\pi r^3.$$

Rép.– i) Par définition

$$\begin{aligned} f^*(xdy\wedge dz)(X,Y) &= f_1 dy\wedge dz(df(X),df(Y)) \\ &= f_1(df_2(X)df_3(Y)-df_3(X)df_2(Y)) \\ &= f_1 df_2\wedge df_3(X,Y). \end{aligned}$$

ii) On a

$$\begin{aligned} f^*(xdy\wedge dz) &= f_1 df_2\wedge df_3 \\ &= f_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial u}du+\frac{\partial f_2}{\partial v}dv\right)\wedge\left(\frac{\partial f_3}{\partial u}du+\frac{\partial f_3}{\partial v}dv\right) \\ &= f_1\left(\frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial f_3}{\partial v}-\frac{\partial f_3}{\partial u}\frac{\partial f_2}{\partial v}\right)du\wedge dv \end{aligned}$$

iii) En appliquant circulairement le résultat de *ii* on obtient $f^*\omega=\langle f, f_u\wedge f_v\rangle du\wedge dv$.
iv) Notons que $\|f\|=r$ et que $\langle f,f_u\rangle=\langle f,f_v\rangle=0$ ainsi

$$\langle f, f_u\wedge f_v\rangle=\pm r\|f_u\wedge f_v\|$$

Notons que la normale sortante est $n=\frac{1}{r}$ et que f préserve l'orientation, ainsi $f_u\wedge f_v$ est proportionnelle à n. Par conséquent

$$\langle f, f_u\wedge f_v\rangle= r\|f_u\wedge f_v\|.$$

v) Supposons que f soit la paramétrisation habituelle de la sphère épointée des pôles sud et nord. Alors

$$\int_{\mathbb{S}^2(r)}\omega=r\int_{\mathcal{U}}\|f_u\wedge f_v\|du\wedge dv=r\ Aire(\mathbb{S}^2(r))=4\pi r^3.$$

2) On rappelle qu'un champ de vecteurs tangents sur la sphère unité s'identifie à une application $Z:\mathbb{S}^2(1)\longrightarrow\mathbb{R}^3$ C^∞ telle que pour tout $p\in\mathbb{S}^2(1)$, $\langle p, Z(p)\rangle=0$. On suppose qu'il existe un champ de vecteurs tangents Z *unitaire* sur la sphère c'est-à-dire tel que pour $p\in\mathbb{S}^2(1)$, $\|Z(p)\|=1$ et on définit

$$\begin{array}{rccc} W: & \mathbb{R}^3\setminus\{O\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & p & \longmapsto & Z\left(\dfrac{p}{\|p\|}\right) \end{array}$$

Montrer que pour tout $r>0$, la restriction du champ de vecteurs W à $\mathbb{S}^2(r)$ est un champ de vecteurs tangents à $\mathbb{S}^2(r)$ et unitaire.

Rép.– Notons déjà que puisque Z est unitaire, W est nécessairement unitaire puisque

$$\|W(p)\|=\|Z\left(\frac{p}{\|p\|}\right)\|=1$$

Ensuite, si $p \in \mathbb{S}^2(r)$ alors $p = r\frac{p}{\|p\|}$ avec bien sûr $\frac{p}{\|p\|} \in \mathbb{S}^2(1)$. Donc

$$\langle \frac{p}{\|p\|}, Z(\frac{p}{\|p\|})\rangle = 0$$

par définition de Z. Ceci entraîne $\langle p, W(p)\rangle = 0$.

3) Soient $\epsilon > 0$ et $0 < r_1 < 1 < r_2$. On pose

$$\begin{array}{rccl} \psi_\epsilon : & C(r_1, r_2) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & p & \longmapsto & p + \epsilon W(p). \end{array}$$

où $C(r_1, r_2) = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid r_1 < \|p\| < r_2\}$.
i) Soit $r \in]r_1, r_2[$. Montrer que l'image de $\mathbb{S}^2(r)$ par ψ_ϵ est incluse dans une sphère dont on déterminera le rayon.
ii) On suppose que $\psi_\epsilon(p) = \psi_\epsilon(q)$ avec $p \neq q$. Montrer que $\|p\| = \|q\|$.
iii) Sous les mêmes hypothèses que le ii, montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que

$$1 \leq \epsilon \|dW\|$$

où $\|dW\| = \sup_{p \in C(r_1, r_2)} \|dW_p\|$ et $\|dW_p\| = \sup_{\|V\|=1} \|dW_p(V)\|$.
iv) Montrer que si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit alors ψ_ϵ est injective (on raisonnera par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(\epsilon_k)_k$ tendant vers 0 pour laquelle chaque ψ_{ϵ_k} n'est pas injectif).
v) Montrer que pour tout $V \in \mathbb{R}^3$ et tout $p \in C(r_1, r_2)$ on a

$$\|(d\psi_\epsilon)_p(V)\| \leq (1 - \epsilon\|dW\|)\|V\|.$$

vi) Montrer que si $\epsilon > 0$ est suffisamment petit ψ_ϵ est un difféomorphisme global sur son image.

Rép.– i) Puisque p et $W(p)$ sont perpendiculaires, on a

$$\|\psi_\epsilon(p)\|^2 = \|p + \epsilon W(p)\|^2 = \|p\|^2 + \epsilon^2\|W(p)\|^2 = r^2 + \epsilon^2.$$

Ainsi l'image de $\mathbb{S}^2(r)$ par ψ_ϵ est incluse dans la sphère $\mathbb{S}^2(\sqrt{r^2 + \epsilon^2})$.
ii) Si $\psi_\epsilon(p) = \psi_\epsilon(q)$ alors en passant aux normes

$$\|p\|^2 + \epsilon^2\|W(p)\|^2 = \|q\|^2 + \epsilon^2\|W(q)\|^2$$

et puisque $\|W(p)\| = \|W(q)\| = 1$ c'est que $\|p\| = \|q\|$.
iii) De $p + \epsilon W(p) = q + \epsilon W(q)$ on déduit $q - p = \epsilon(W(q) - W(p))$ d'où

$$\|q - p\| = \epsilon\|W(q) - W(p)\| \leq \epsilon\|dW\|\|q - p\|$$

par l'inégalité des accroissements finis. On en déduit $1 \leq \epsilon \|dW\|$.
iv) Soient $p_k \neq q_k$ dans $C(r_1, r_2)$ tel que $\psi_{\epsilon_k}(p_k) = \psi_{\epsilon_k}(q_k)$. D'après *iii* on a

$$1 \leq \epsilon_k \|dW\|.$$

Comme $\epsilon_k \longrightarrow 0$, on obtient une contradiction.
v) On a

$$\begin{array}{rcl} \|(d\psi_\epsilon)_p(V)\| & = & \|V + \epsilon dW_p(V)\| \\ & \geq & \|V\| - \epsilon \|dW_p(V)\| \\ & \geq & (1 - \epsilon \|dW_p\|)\|V\| \\ & \geq & (1 - \epsilon \|dW\|)\|V\| \end{array}$$

vi) Si ϵ est suffisamment petit alors $1 - \epsilon\|dW\| > 0$ et pour tout p, la différentielle $d\psi_\epsilon$ est injective donc bijective. Ainsi ψ_ϵ est un difféomorphisme local. D'après la question *iv* ce difféomorphisme local est injectif. Le théorème d'inversion globale montre alors que ψ_ϵ est un difféomorphisme global sur son image.

4) i) Soient $\epsilon > 0$, α et β deux 1-formes différentielles sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ et g et h deux applications de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{U}$. Montrer que

$$(g + \epsilon h)^*(\alpha \wedge \beta) = g^*(\alpha \wedge \beta) + \epsilon\left(g^*\alpha \wedge h^*\beta + h^*\alpha \wedge g^*\beta\right) + \epsilon^2 h^*(\alpha \wedge \beta)$$

ii) En déduire que

$$\psi_\epsilon^* \omega = \omega + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2$$

où ω est la 2-forme définie en début de problème et ω_1 et ω_2 sont des 2-formes indépendantes de ϵ qu'on ne cherchera pas à déterminer.
iii) Montrer que

$$\int_{\mathbb{S}^2(1)} \psi_\epsilon^* \omega = 4\pi + A_1 \epsilon + A_2 \epsilon^2$$

où A_1 et A_2 sont des constantes que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Rép.– i) De $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$ on tire

$$(g + \epsilon h)^*(\alpha \wedge \beta) = (g^*\alpha + \epsilon h^*\alpha) \wedge (g^*\beta + \epsilon h^*\beta)$$

ce qui une fois développé, donne la relation demandée.
ii) D'après *i* on a

$$\psi_\epsilon^*(\alpha \wedge \beta) = (id + \epsilon W)^*(\alpha \wedge \beta) = \alpha \wedge \beta + \epsilon \kappa_1 + \epsilon^2 \kappa_2$$

où κ_1 et κ_2 sont des 2-formes indépendantes de ϵ. En posant $(\alpha, \beta) = (xdy, dz)$ puis $(\alpha, \beta) = (ydz, dx)$ et enfin $(\alpha, \beta) = (zdx, dy)$ et en sommant on obtient l'égalité recherchée.

iii) Il suffit d'intégrer la relation obtenue en *ii*. On sait déjà par une question précédente que $\int_{\mathbb{S}^2(1)} \omega = 4\pi$. Si on pose

$$A_1 = \int_{\mathbb{S}^2(1)} \omega_1 \quad \text{et} \quad A_2 = \int_{\mathbb{S}^2(1)} \omega_2$$

on obtient par linéarité le résultat demandé.

5) On choisit $\epsilon > 0$ tel que ψ_ϵ soit un difféomorphisme sur son image. On admet que $\psi_\epsilon(\mathbb{S}^2(1)) = \mathbb{S}^2(\sqrt{1+\epsilon^2})$. Ainsi

$$\int_{\mathbb{S}^2(\sqrt{1+\epsilon^2})} \omega = \pm \int_{\mathbb{S}^2(1)} \psi_\epsilon^* \omega$$

selon que ψ_ϵ conserve ou non les orientations.
i) En s'appuyant sur les résultats des questions 1.*v* et 4.*iii*, montrer que l'on aboutit à une contradiction.
ii) En déduire qu'il n'existe pas de champ de vecteurs tangents partout non nul sur la sphère unité [1].

Rép.– i) D'après la question 1.*v* on a

$$\int_{\mathbb{S}^2(\sqrt{1+\epsilon^2})} \omega = 4\pi(1+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}$$

et d'après la question 4.*iii* on a

$$\int_{\mathbb{S}^2(1)} \psi_\epsilon^* \omega = 4\pi + A_1\epsilon + A_2\epsilon^2.$$

L'égalité

$$\int_{\mathbb{S}^2(\sqrt{1+\epsilon^2})} \omega = \pm \int_{\mathbb{S}^2(1)} \psi_\epsilon^* \omega$$

entraîne

$$\pm 4\pi(1+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}} = 4\pi + A_1\epsilon + A_2\epsilon^2$$

ce qui est évidemment impossible.
ii) La contradiction obtenue montre que la supposition énoncée à la question 2 est fausse : il n'existe pas de champ de vecteurs tangents unitaire sur la sphère. Supposons qu'il existe un champ de vecteurs tangents partout non nul sur la sphère, disons $\widetilde{Z}$, alors il existerait un champ de vecteurs tangents unitaire, celui donné par $Z = \frac{\widetilde{Z}}{\|\widetilde{Z}\|}$. On a donc montré qu'il

1. Ce résultat est connu sous le nom de *Théorème de la sphère chevelue*. La démonstration proposée dans ce problème est due à John Milnor et date de 1978.

n'existe pas de champ de vecteurs tangents partout non nul sur la sphère.

6) Soit $P : \mathbb{R}^3 \setminus \{z = -1\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ le champ de vecteurs défini par

$$P(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\dfrac{xy}{1+z} \\ (1 - \dfrac{y^2}{1+z}) \\ -y \end{pmatrix}$$

i) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z = -1\}$ et tel que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Montrer que $P(x, y, z)$ est dans le plan tangent $T_{(x,y,z)}\mathbb{S}^2(1)$.
ii) Soit (x, y, z) comme dans la question précédente. Montrer que $P(x, y, z)$ est unitaire.
iii) Pourquoi les résultats de i et ii ne sont-ils pas contradictoires avec celui du 5.ii ?

Rép.– i) Pour tout $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z = -1\}$ on a :

$$\begin{aligned} \langle p, P(p)\rangle &= \frac{1}{1+z}\left(-x^2y + y(1+z) - y^3 - (1+z)zy\right) \\ &= \frac{y}{1+z}\left(-x^2 + (1+z) - y^2 - (1+z)z\right) \\ &= \frac{y}{1+z}\left(1 - x^2 - y^2 - z^2\right) \end{aligned}$$

Si de plus $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, on déduit $\langle p, P(p)\rangle = 0$ ce qui montre que $P(x, y, z)$ est dans le plan tangent $T_{(x,y,z)}\mathbb{S}^2(1)$.
ii) Pour tout $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{z = -1\}$ on a :

$$\begin{aligned} \|P(x,y,z)\|^2 &= \left(-\frac{xy}{1+z}\right)^2 + \left(1 - \frac{y^2}{1+z}\right)^2 + y^2 \\ &= \frac{1}{(1+z)^2}\left(x^2y^2 + (1+z-y^2)^2 + (1+z)^2y^2\right) \\ &= \frac{1}{(1+z)^2}\left(x^2y^2 + (1+z)^2 - 2(1+z)y^2 + y^4 + (1+z)^2y^2\right) \\ &= \frac{1}{(1+z)^2}\left(x^2y^2 + y^4 + z^2y^2 + (1+z)^2 - 2y^2 - 2zy^2 + y^2 + 2zy^2\right) \\ &= \frac{1}{(1+z)^2}\left(y^2(x^2+y^2+z^2) + (1+z)^2 - y^2\right). \end{aligned}$$

Si de plus $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, on déduit

$$\|P(x,y,z)\|^2 = \frac{1}{(1+z)^2}\left(y^2 + (1+z)^2 - y^2\right) = 1.$$

iii) Le champ P n'est pas défini aux points $\{z = 1\}$. Il induit un champ de vecteurs tangents unitaire sur la sphère $\mathbb{S}^2(1)$ privée d'un point, le pôle Sud. Ceci n'est pas contradictoire avec 5.ii puisque le champ P qui est certes tangent et unitaire n'est pas partout défini sur $\mathbb{S}^2(1)$.