Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie : Courbes et surfaces

Lundi 26 novembre 2012 - Durée 2 heures

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière et $\delta = \pi \circ \gamma$ où $\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est la projection $(x, y, z) \longmapsto (x, y)$. Si $t \in I$ est un point régulier de δ alors $k_\gamma(t) \leq k_\delta(t)$.

2.– Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée régulière et $\delta = \pi \circ \gamma$ comme ci-dessus. Si $t \in I$ est un point régulier de δ alors $k_\gamma(t) \geq k_\delta(t)$.

3.– L'enveloppe de la famille de droites d'équation $x - \cos(t)y - \sin(t) = 0$, $t \in [0, 2\pi]$, est l'hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = 1$.

4.– Soit $\gamma(t) = (1 + \cos t, \sin t(1 + \cos t))$ avec $t \in [0, 2\pi]$. L'aire enclose par γ vaut π.

5.– L'indice de $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$t \longmapsto \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2} \right)$$

vaut l'infini.

6.– Soient $\alpha > 0$ et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple d'indice $Ind(\gamma) = 1$. Si pour tout $t \in I$ on a $k_{alg}(t) \geq \alpha$ alors l'aire enclose par γ est plus petite ou égale à $\frac{\pi}{\alpha^2}$.

7.– Soit α une 1-forme non nulle de $\mathbb{R}^2$. Si $d\alpha = 0$ alors pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ on a $d(f\alpha) = 0$.

8.– Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Si $A^*(dx \wedge dy) = dx \wedge dy$ alors $A \in SO(2)$.

9.– L'ensemble $\{\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid \gamma \text{ est régulière}\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

10.– Soient $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto (e^x, e^y)$ et $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière. Alors $\varphi \circ \gamma$ est régulière.

Problème. – Soient $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $r > 0$ et :

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & x(t) + iy(t) = re^{i\alpha \cos 2\pi t}. \end{array}$$

1) Déterminer les points réguliers de f. Quel est le support de f ?

2) Soit $\gamma_0 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une courbe C^∞ fermée et paramétrée par la longueur d'arc. On note $T_0 = \gamma_0'$ et $N_0 = iT_0$. Puis, pour tout $(u, t) \in [0, 1]^2$ on définit

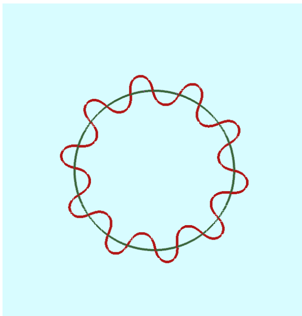
$$h(u, t) := x(t)T_0(u) + y(t)N_0(u).$$

Soit n un entier pair non nul. Pour tout $t \in [0, 1]$ on pose

$$\gamma(t) = \gamma_0(0) + \int_0^t h(u, nu)du.$$

a) Montrer que la courbe γ est paramétrée à vitesse constante.

b) Montrer que si, pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$, on a $\gamma_0'(t + \frac{1}{2}) = -\gamma_0'(t)$ alors γ est fermée, i.e. $\gamma(0) = \gamma(1)$.



Un exemple de courbe γ avec $n = 10$ et Supp γ_0 = un cercle

On suppose désormais que γ_0 satisfait à la condition de la question 2. b.

3) On note $T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}$ et $N(t) = iT(t)$. Montrer que

$$\forall t \in [0,1], \quad T(t) = e^{i\alpha \cos 2\pi n t} T_0(t) \quad \text{et} \quad N(t) = e^{i\alpha \cos 2\pi n t} N_0(t).$$

4) On note k_{alg} la courbure algébrique de γ. Déduire des formules de Frenet que

$$\frac{dT}{dt}(t) = r k_{alg}(t) N(t) \quad \text{et} \quad \frac{dN}{dt}(t) = -r k_{alg}(t) T(t).$$

5) On note k^0_{alg} la courbure algébrique de γ_0. Montrer que

$$\forall t \in [0,1], \quad r k_{alg}(t) = -2\pi n \alpha \sin(2\pi n t) + k^0_{alg}(t).$$

6) Donner un exemple de choix de γ_0 et des paramètres α et r conduisant à une courbe paramétrée fermée γ dont la courbure algébrique a pour expression

$$k_{alg}(t) = 1 + \sin 2\pi n t$$

où n est un entier pair non nul.

7) Montrer que $Ind(\gamma) = Ind(\gamma_0)$.

8) Montrer qu'il existe une application C^∞ :

$$\begin{array}{rccc} H : & [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (v,t) & \longmapsto & H(v,t) \end{array}$$

telle que $t \mapsto H(0,t)$ est la courbe γ_0, $t \mapsto H(1,t)$ est la courbe γ et pour tout $v \in]0,1[$, $t \mapsto H(v,t)$ est une courbe régulière fermée (qu'on notera γ_v).