Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie : Courbes et surfaces

Contrôle partiel du 18 novembre 2015

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Soient $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe dont la distance à l'origine est la fonction $d(t) = dist(\gamma(t); O) = e^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors γ est régulière.

2.– La courbe $\gamma : I \longrightarrow \subset \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\gamma(t) = (1 + 3t - t^2, t^2, 2 - 3t - t^2)$$

est plane.

3.– Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière et k sa courbure principale. On a

$$\int_I k(t)\|\gamma'(t)\|^2 dt \leq \ Long(\gamma').$$

4.– Soient $R > 1$, α une 1-forme de $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{d}\alpha = x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ et $\gamma_R : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée donnée par $\gamma_R(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$. Alors on a

$$\int_{\gamma_R} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha.$$

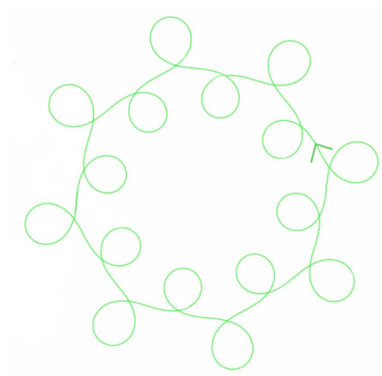
5.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière dont la torsion n'est jamais nulle. Soient $t_0 \in I$ et π la projection orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $P = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)^{\perp}$. Alors la courbe $\pi \circ \gamma$ présente un point de rebroussement de première espèce en t_0.

6.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière. Soient $t_0 \in I$ un point où la torsion est nulle et π la projection orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $P =$

$\gamma(t_0) + \gamma'(t_0)^{\perp}$. Alors la courbe $\pi \circ \gamma$ présente un point de rebroussement de seconde espèce en t_0.

7.– Le périmètre L d'une ellipse dont les demi-axes sont de longueur a et b vérifie $L \geq 2\pi\sqrt{ab}$.

8.– La courbe suivante, parcourue une seule fois, est d'indice zéro :



9.– Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et

$$\begin{array}{cccc} \gamma : & [0, 2k\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & \theta & \longmapsto & \rho(\theta)e^{i\theta} \end{array}$$

une courbe polaire birégulière telle que pour tout θ, $\rho(\theta) > 0$. Alors $Ind(\gamma) = -Ind(\delta)$ où

$$\begin{array}{cccc} \delta : & [0, 2k\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & \theta & \longmapsto & \frac{e^{i\theta}}{\rho(\theta)} \end{array}$$

10.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc dont la courbure algébrique est

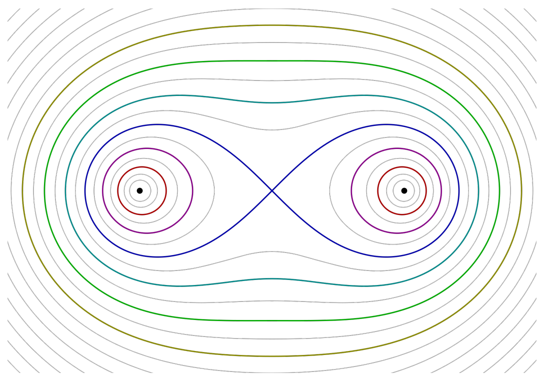
$$\begin{array}{cccc} k_{alg} : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \frac{1}{2} + \cos s \end{array}$$

Alors γ est une courbe fermée, i. e. $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$.

Problème. – Soient $a > 0$, $b > 0$ deux réels et $F = (a, 0)$, $F' = (-a, 0)$ deux points du plan. Les *ovales de Cassini*[1] sont les lieux

$$C_{a,b} := \{M(x, y) \mid MF \times MF' = b^2\}$$

où MF et MF' sont les distances de M à F et de M à F'.



Quelques ovales de Cassini.

1) Montrer que M de coordonnées polaire (ρ, θ), $\rho \geq 0$, est dans $C_{a,b}$ si et seulement si

$$\rho^4 - 2a^2\rho^2 \cos 2\theta + a^4 = b^4 \qquad (*)$$

2) i) Montrer que $C_{a,b}$ n'est jamais vide.
ii) Montrer que (Ox) et (Oy) sont des axes de symétrie de $C_{a,b}$.

3) On cherche une courbe polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\rho(\theta) \geq 0$, dont le support soit $C_{a,b}$.
i) Montrer que nécessairement $b \geq a$.
ii) Sous l'hypothèse $b > a$, donner une expression pour $\theta \mapsto \rho(\theta)$ et montrer que pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho(\theta) > 0$.
iii) En déduire que si $b > a$ la paramétrisation de $C_{a,b}$ donnée par $\theta \mapsto (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$ est régulière.

4) On suppose désormais que $b = a$.
i) Montrer que pour tout $\theta \in]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$, l'équation $(*)$ n'admet pas de solution $\rho > 0$.
ii) Montrer que $C_{a,a}$ est le support de la courbe polaire $\rho(\theta) = a\sqrt{2\cos 2\theta}$ où

1. Les ovales de Cassini sont parfois appelés *lemniscates à deux foyers*

$\theta \in [-\pi, -\frac{3\pi}{4}] \cup [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$.

5) On étudie désormais la courbe polaire

$$\begin{array}{rccc} \rho : & [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & \theta & \longmapsto & a\sqrt{2\cos 2\theta} \end{array}$$

i) L'application ρ est-elle C^1 ? Quels sont les points réguliers de ρ ?
ii) Déterminer la longueur L de la courbe polaire ρ en fonction de la *constante de Gauss* :

$$G := \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = 0,83462...$$

Indication : dans l'intégrale définissant la longueur, on pourra effectuer le changement de variable $u = \sqrt{\cos 2\theta}$.

6) i) Montrer que la courbe polaire ρ est fermée et simple
ii) Calculer l'aire du domaine D enclos par la courbe en fonction de a.

7) Montrer que la courbure algébrique $k_{alg}(\theta)$ est une fonction linéaire de la distance à l'origine $\rho(\theta)$.

8) Soit E la branche de l'hyperbole équilatère définie par

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid x^2 - y^2 = a^{-2}\}$$

i) Donner une paramétrisation polaire $\theta \mapsto r(\theta) \in \mathbb{R}_+^*$ de E.
ii) En déduire que E est l'image de $C_{a,a} \cap (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ par l'inversion

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} & \mapsto & \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \\ & (x, y) & \longmapsto & (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}) \end{array}$$