Université Claude Bernard Lyon 1

M1 – Géométrie : Courbes et surfaces

Corrigé du contrôle partiel du 18 novembre 2015

Les documents sont autorisés mais les calculettes sont interdites (car inutiles). Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Le QCM. – On répond par vrai ou faux, sans justifier.

1.– Soient $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe dont la distance à l'origine est la fonction $d(t) = dist(\gamma(t); O) = e^t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors γ est régulière.

Rép.– Vrai. On a

$$d^2(t) = \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = e^{2t} \quad \Longrightarrow \quad (d^2)'(t) = 2\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle = 2e^{2t} > 0$$

par conséquent $\gamma'(t)$ ne s'annule jamais.

2.– La courbe $\gamma : I \longrightarrow \subset \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\gamma(t) = (1 + 3t - t^2, t^2, 2 - 3t - t^2)$$

est plane.

Rép.– Vrai. Il y a plusieurs façons de le voir.
Méthode 1 : On écrit la courbe sous la forme

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t^2$$

et il apparaît immédiatement que γ est une parabole dont le support est inclus dans le plan passant par $(1, 0, 2)$ et engendré par $(3, 0, -3)$ et $(-1, 1, -1)$.
Méthode 2 : On fait un calcul direct pour constater que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) - 2y(t) + z(t) = 3.$$

Méthode 3 : On détermine la binormale :

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = \begin{pmatrix} 3 - 2t \\ 2t \\ -3 - 2t \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

et on observe qu'elle est constante.
Méthode 4 : On cacule la torsion qui est nulle car $\gamma'''(t) = (0,0,0)$.

3.– Soient $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe régulière et k sa courbure principale. On a

$$\int_I k(t)\|\gamma'(t)\|^2 dt \leq \ Long(\gamma').$$

Rép.– Vrai. De

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \leq \frac{\|\gamma'(t)\|\|\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3} \leq \frac{\|\gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^2}$$

on déduit

$$\int_I k(t)\|\gamma'(t)\|^2 dt \leq \int_I \|\gamma''(t)\| dt = Long(\gamma').$$

4.– Soient $R > 1$, α une 1-forme de $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{d}\alpha = x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ et $\gamma_R : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée donnée par $\gamma_R(\theta) = (R\cos\theta, R\sin\theta)$. Alors on a

$$\int_{\gamma_R} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha.$$

Rép.– Vrai. D'après la formule de Green-Riemann, on a

$$\int_{\gamma_R} \alpha - \int_{\gamma_1} \alpha = \int_{A_R} \mathrm{d}\alpha = \int_{A_R} x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

où $A_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R\}$. Puisque A_R est symétrique par rapport à (Oy) et que la fonction $x \mapsto x$ est impaire, on a

$$\int_{A_R} x\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0.$$

5.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière dont la torsion n'est jamais nulle. Soient $t_0 \in I$ et π la projection orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $P = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)^\perp$. Alors la courbe $\pi \circ \gamma$ présente un point de rebroussement de première espèce en t_0.

Rép.– Vrai. Puisque la torsion est non nulle, $(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0), \gamma'''(t_0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Pour simplifier le raisonnement supposons que cette base soit orthogonale ainsi $P = \gamma(t_0) + Vect(\gamma''(t_0), \gamma'''(t_0))$. Le développement limité à l'ordre 3 de γ s'écrit

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t-t_0)\gamma'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}\gamma''(t_0) + \frac{(t-t_0)^3}{6}\gamma'''(t_0) + o(t-t_0)^3$$

et celui de $\pi \circ \gamma$:

$$\pi \circ \gamma(t) = \gamma(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}\gamma''(t_0) + \frac{(t-t_0)^3}{6}\gamma'''(t_0) + o(t-t_0)^3$$

et par conséquent $\pi \circ \gamma$ admet un point de rebroussement de première espèce en t_0. Raisonnement similaire si la base n'est pas orthogonale.

6.– Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe birégulière. Soient $t_0 \in I$ un point où la torsion est nulle et π la projection orthogonal de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $P = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)^\perp$. Alors la courbe $\pi \circ \gamma$ présente un point de rebroussement de seconde espèce en t_0.

Rép.– Faux. Par exemple, si $\gamma^{(4)}(t_0) = 0$ et $\gamma^5(t_0)$ est non nul et perpendiculaire à $Vect(\gamma'(t_0), \gamma''(t_0))$ alors t_0 est un point de rebroussement de première espèce. Un exemple concret avec $t_0 = 0$ est donné par

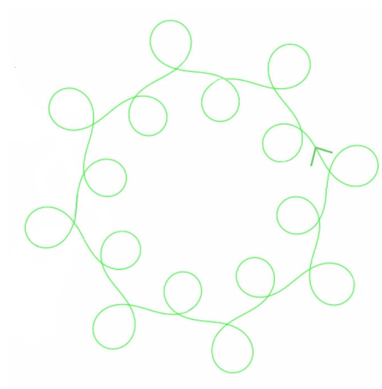
$$\gamma(t) = (t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^5}{5!})$$

On a $\gamma'(t_0) = (1,0,0)$, $\gamma''(t_0) = (0,1,0)$, $\gamma'''(t_0) = \gamma^{(4)}(t_0) = (0,0,0)$ et $\gamma^{(5)}(t_0) = (0,0,1)$.

7.– Le périmètre L d'une ellipse dont les demi-axes sont de longueur a et b vérifie $L \geq 2\pi\sqrt{ab}$.

Rép.– Vrai. L'aire A du domaine enclos par l'ellipse vaut πab (ce nombre peut s'obtenir au moyen de la formule de Green-Riemann appliquée à $x(t) = a\cos t, y(t) = b\sin t$ et $t \in [0, 2\pi]$). De l'inégalité isopérimétrique $L^2 \geq 4\pi A$, on déduit $L^2 \geq 4\pi^2 ab$ d'où $L \geq 2\pi\sqrt{ab}$.

8.– La courbe suivante, parcourue une seule fois, est d'indice zéro :



Rép.– Faux. Elle est d'indice 1.

9.– Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0, 2k\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & \theta & \longmapsto & \rho(\theta)e^{i\theta} \end{array}$$

une courbe polaire birégulière telle que pour tout θ, $\rho(\theta) > 0$. Alors $Ind(\gamma) = -Ind(\delta)$ où

$$\begin{array}{rccc} \delta : & [0, 2k\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & \theta & \longmapsto & \frac{e^{i\theta}}{\rho(\theta)} \end{array}$$

Rép.– Faux. Si $\rho(\theta) \equiv 1$ alors $\gamma = \delta$ et donc $Ind(\gamma) = Ind(\delta)$.

10.– Soit $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par la longueur d'arc dont la courbure algébrique est

$$\begin{array}{rccc} k_{alg} : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \frac{1}{2} + \cos s \end{array}$$

Alors γ est une courbe fermée, i. e. $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$.

Rép.– Faux. On a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} k_{alg}(s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \cos s\right)ds = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$$

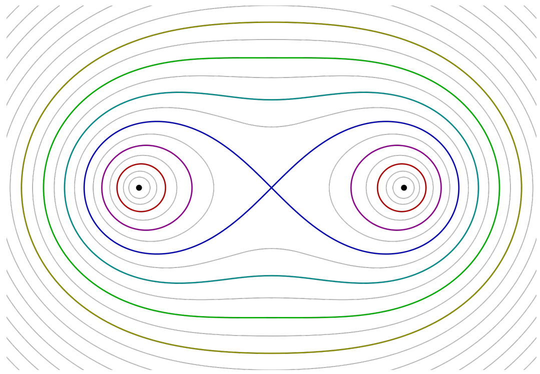
Or, si la courbe était fermée, cette intégrale donnerait son indice qui est un entier relatif.

Problème. – Soient $a > 0$, $b > 0$ deux réels et $F = (a, 0)$, $F' = (-a, 0)$ deux points du plan. Les *ovales de Cassini*[1] sont les lieux

$$C_{a,b} := \{M(x, y) \mid MF \times MF' = b^2\}$$

où MF et MF' sont les distances de M à F et de M à F'.

1. Les ovales de Cassini sont parfois appelés *lemniscates à deux foyers*



Quelques ovales de Cassini.

1) Montrer que M de coordonnées polaire (ρ,θ), $\rho \geq 0$, est dans $C_{a,b}$ si et seulement si

$$\rho^4 - 2a^2\rho^2\cos 2\theta + a^4 = b^4 \qquad (*)$$

Rép.– On a $M = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ d'où $\overrightarrow{FM} = (\rho\cos\theta - a, \rho\sin\theta)$ et $\overrightarrow{F'M} = (\rho\cos\theta + a, \rho\sin\theta)$. Ainsi

$$MF^2 = (\rho\cos\theta - a)^2 + \rho^2\sin^2\theta,\ MF'^2 = (\rho\cos\theta + a)^2 + \rho^2\sin^2\theta$$

et

$$\begin{array}{rcl}
MF \times MF' = b^2 & \iff & MF^2 \times MF'^2 = b^4 \\
& \iff & ((\rho\cos\theta - a)^2 + \rho^2\sin^2\theta) \times ((\rho\cos\theta + a)^2 + \rho^2\sin^2\theta) = b^4 \\
& \iff & (a^2 - \rho^2\cos^2\theta)^2 + \rho^4\sin^4\theta + \rho^2\sin^2\theta((a-\rho\cos\theta)^2 + (a+\rho\cos\theta)^2) = b^4 \\
& \iff & a^4 + \rho^4\cos^4\theta - 2a^2\rho^2\cos^2\theta + \rho^4\sin^4\theta + 2a^2\rho^2\sin^2\theta + 2\rho^4\sin^2\theta\cos^2\theta = b^4 \\
& \iff & a^4 + \rho^4 + 2a^2\rho^2\sin^2\theta - 2a^2\rho^2\cos^2\theta = b^4 \\
& \iff & \rho^4 - 2a^2\rho^2\cos 2\theta + a^4 = b^4.
\end{array}$$

2) i) Montrer que $C_{a,b}$ n'est jamais vide.
ii) Montrer que (Ox) et (Oy) sont des axes de symétrie de $C_{a,b}$.

Rép.– i) Cherchons une solution de $(*)$ sous la forme $(\rho, \theta = 0)$. On a

$$\rho^4 - 2a^2\rho^2 + a^4 = b^4 \iff (\rho^2 - a^2)^2 = b^4 \iff \rho^2 - a^2 = \pm b^2$$

ainsi $(\rho, 0) = (\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ convient.
ii) La substitution $\theta \mapsto \pi - \theta$ montre que $C_{a,b}$ est symétrique par rapport à $(0y)$; la substitution $\theta \mapsto -\theta$ montre qu'elle est symétrique par rapport à (Ox).

3) On cherche une courbe polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$, $\theta \in [-\pi,\pi]$, $\rho(\theta) \geq 0$, dont le support soit $C_{a,b}$.

i) Montrer que nécessairement $b \geq a$.
ii) Sous l'hypothèse $b > a$, donner une expression pour $\theta \mapsto \rho(\theta)$ et montrer que pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho(\theta) > 0$.
iii) En déduire que si $b > a$ la paramétrisation de $C_{a,b}$ donnée par $\theta \mapsto (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$ est régulière.

Rép.– i) Il faut résoudre l'équation $(*)$. Son discriminant vaut

$$\Delta = 4(b^4 - a^4) + 4a^4 \cos^2 2\theta$$

Si $b < a$ alors $b^4 - a^4 < 0$ et $\Delta = 4(b^4 - a^4) < 0$ pour $\theta = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$. L'équation $(*)$ n'ayant pas de solution pour pour toutes les valeurs de $\theta \in [0, 2\pi]$, $C_{a,b}$ ne peut être le support d'une courbe polaire $\theta \mapsto \rho(\theta)$ avec $\theta \in [-\pi, \pi]$.
ii) La résolution de $(*)$ donne

$$\rho^2(\theta) = a^2 \cos 2\theta \pm \sqrt{b^4 - a^4 + a^4 \cos^2 2\theta}$$

Puisque $\sqrt{b^4 - a^4 + a^4 \cos^2 2\theta} > |a^2 \cos 2\theta|$ on a

$$a^2 \cos 2\theta - \sqrt{b^4 - a^4 + a^4 \cos^2 2\theta} < 0.$$

Il faut donc choisir

$$\rho^2(\theta) = a^2 \cos 2\theta + \sqrt{b^4 - a^4 + a^4 \cos^2 2\theta}.$$

Notons que pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$, $\rho^2(\theta) > 0$. Finalement

$$\rho(\theta) = \sqrt{a^2 \cos 2\theta + \sqrt{b^4 - a^4 + a^4 \cos^2 2\theta}}.$$

iii) D'après le cours, la courbe $\theta \mapsto (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$ est régulière si et seulement si $\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2 \neq 0$ pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$. Or d'après ii) $\rho(\theta)^2 > 0$ quel que soit $\theta \in [-\pi, \pi]$. D'où la régularité.

4) On suppose désormais que $b = a$.
i) Montrer que pour tout $\theta \in]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$, l'équation $(*)$ n'admet pas de solution $\rho > 0$.
ii) Montrer que $C_{a,a}$ est le support de la courbe polaire $\rho(\theta) = a\sqrt{2\cos 2\theta}$ où $\theta \in [-\pi, -\frac{3\pi}{4}] \cup [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$.

Rép.– i) Puisque $b = a$ on a l'équation $(*)$ devient

$$(*) \iff \rho^2(\rho^2 - 2a^2 \cos 2\theta) = 0.$$

Si $\theta \in]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$ alors $\cos 2\theta < 0$ et $\rho^2 - 2a^2 \cos 2\theta > 0$. L'équation $(*)$ n'admet que $\rho = 0$ comme solution.

ii) Si $\theta \in [-\pi, -\frac{3\pi}{4}] \cup [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$ alors $\cos 2\theta \geq 0$ et l'équation $(*)$ admet deux solutions : $\rho = 0$ et $\rho = a\sqrt{2\cos 2\theta}$. Donc, *a priori*, $C_{a,a}$ est l'ensemble des points dont les coordonnées polaires parcourent

$$\{(\rho = 0, \theta), \theta \in [-\pi, \pi]\} \cup \{(a\sqrt{2\cos 2\theta}, \theta), \theta \in [-\pi, -\frac{3\pi}{4}] \cup [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]\}$$

Mais toutes les solutions de la forme $(\rho = 0, \theta)$ correspondent à l'origine qui est aussi obtenue en substituant $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \pm\frac{3\pi}{4}$ dans l'expression $(a\sqrt{2\cos 2\theta}, \theta)$. Par conséquent, $C_{a,a}$ est le support de la courbe polaire $\rho(\theta) = a\sqrt{2\cos 2\theta}$ où $\theta \in [-\pi, -\frac{3\pi}{4}] \cup [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$.

5) On étudie désormais la courbe polaire

$$\begin{array}{rccc} \rho : & [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & \theta & \longmapsto & a\sqrt{2\cos 2\theta} \end{array}$$

i) L'application ρ est-elle C^1 ? Quels sont les points réguliers de ρ ?
ii) Déterminer la longueur L de la courbe polaire ρ en fonction de la *constante de Gauss* :

$$G := \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = 0,83462...$$

Indication : dans l'intégrale définissant la longueur, on pourra effectuer le changement de variable $u = \sqrt{\cos 2\theta}$.

Rép.– i) L'application ρ est C^1 sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ et de plus

$$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[, \quad \rho(\theta) > 0$$

donc tous les points C^1 de la courbe polaire sont réguliers.
ii) On a

$$\rho'(\theta) = -\frac{2a\sin 2\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}$$

d'où

$$\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2 = \frac{4a^2\cos^2 2\theta + 4a^2\sin^2 2\theta}{2\cos 2\theta} = \frac{4a^2}{2\cos 2\theta} = \frac{4a^4}{\rho(\theta)^2}$$

Ainsi

$$L = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2a^2}{\rho(\theta)} d\theta = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\rho(\theta)}$$

Soit $u = \frac{1}{\sqrt{2}a}\rho(\theta) = \sqrt{\cos 2\theta}$. On a

$$du = \frac{1}{\sqrt{2}a}\rho'(\theta)d\theta = -\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = -\frac{\sqrt{1-u^4}}{u} d\theta$$

d'où

$$d\theta = -\frac{u}{\sqrt{1-u^4}}du$$

et

$$L = \frac{4a}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^4}} = \sqrt{2}\pi a G.$$

6) i) Montrer que la courbe polaire ρ est fermée et simple
ii) Calculer l'aire du domaine D enclos par la courbe en fonction de a.

Rép.– i) Puisque $\rho(\pm\frac{\pi}{4}) = 0$ la courbe est fermée. Elle est simple puisque sur $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$, $\rho(\theta) \neq 0$.
ii) On a

$$Aire(D) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\rho^2(\theta)d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta d\theta = \left[\frac{a^2}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

7) Montrer que la courbure algébrique $k_{alg}(\theta)$ est une fonction linéaire de la distance à l'origine $\rho(\theta)$.

Rép.– D'après le cours :

$$k_{alg} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Or, d'une part

$$\begin{aligned}
\rho'' &= \left(-a\frac{2\sin 2\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}\right)' \\
&= a\frac{(\sqrt{2\cos 2\theta})'2\sin 2\theta - (2\sin 2\theta)'\sqrt{2\cos 2\theta}}{2\cos 2\theta} \\
&= a\frac{-\frac{2\sin 2\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}2\sin 2\theta - 4\cos 2\theta\sqrt{2\cos 2\theta}}{2\cos 2\theta} \\
&= -a\frac{4\sin^2 2\theta + 8\cos^2 2\theta}{(2\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\rho''\rho = -a^2\frac{4\sin^2 2\theta + 8\cos^2 2\theta}{2\cos 2\theta}$$

et

$$\begin{aligned}
\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' &= 2a^2\cos 2\theta + 2\frac{4a^2\sin^2 2\theta}{2\cos 2\theta} + a^2\frac{4\sin^2 2\theta + 8\cos^2 2\theta}{2\cos 2\theta} \\
&= a^2\frac{4\cos^2 2\theta + 8\sin^2 2\theta + 4\sin^2 2\theta + 8\cos^2 2\theta}{2\cos 2\theta} \\
&= \frac{12a^2}{2\cos 2\theta} = \frac{12a^4}{\rho^2}
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \frac{2a^2}{\rho}$$

Finalement

$$k_{alg} = \frac{12a^4}{\rho^2}\frac{\rho^3}{8a^6} = \frac{3\rho}{2a^2}$$

8) Soit E la branche de l'hyperbole équilatère définie par $\{(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid x^2 - y^2 = a^{-2}\}$
i) Donner une paramétrisation polaire $\theta \mapsto r(\theta) \in \mathbb{R}_+^*$ de E.
ii) En déduire que E est l'image de $C_{a,a} \cap (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ par l'inversion

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} & \mapsto & \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right) \end{array}$$

Rép.– i) Posons $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $\theta \in [-\pi,\pi]$. On a

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in E & \Longleftrightarrow & r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = a^{-2} \quad \text{et} \quad \theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ & \Longleftrightarrow & r^2\cos 2\theta = a^{-2} \quad \text{et} \quad \theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ & \Longleftrightarrow & r^2\cos 2\theta = a^{-2} \quad \text{et} \quad \theta \in [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}] \\ & \Longleftrightarrow & r^2 = \dfrac{1}{a^2\cos 2\theta} \quad \text{et} \quad \theta \in]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}[\end{array}$$

Une paramétrisation en polaire est donnée par

$$\begin{array}{rccc} r : &]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & \theta & \longmapsto & \dfrac{1}{a\sqrt{\cos 2\theta}} \end{array}$$

Autrement dit $r = \rho^{-1}$.
ii) En effet

$$\Phi(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \left(\frac{\cos\theta}{\rho}, \frac{\sin\theta}{\rho}\right) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$