Examen final du mardi 30 avril 2024 - durée 1h

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [12 pts] – On considère les deux champs de vecteurs $\overrightarrow{V}_1$ et $\overrightarrow{V}_2$ définis sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{V}_1(x,y,z) & = & (\cos y - \cos z)\,\overrightarrow{i} + (\cos z - \cos x)\,\overrightarrow{j} + (\cos x - \cos y)\,\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{V}_2(x,y,z) & = & \cos x\,\overrightarrow{i} + \cos y\,\overrightarrow{j} + \cos z\,\overrightarrow{k}\,. \end{array}$$

1) [2.5 pts] Montrer que l'un des champs est un champ de gradient (c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire) et que l'autre est un champ rotationnel (c'est-à-dire qu'il admet un potentiel vecteur).

2) [1.5 pts] Déterminer un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ du champ de vecteurs dont le rotationnel est nul.

3) [1 pt] Calculer les circulations $\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{V_1})$ et $\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{V_2})$ de $\overrightarrow{V_1}$ et de $\overrightarrow{V_2}$ le long du chemin $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ défini par
$$\gamma(t) = (t,t,t).$$

4) [2 pts] On note Ω le cube $[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$ et S la surface de ce cube orientée avec la normale sortante. Calculer
$$I_1 = \iiint_\Omega \mathrm{div}\overrightarrow{V_1}\,dxdydz \quad \text{et} \quad I_2 = \iiint_\Omega \mathrm{div}\overrightarrow{V_2}\,dxdydz.$$

5) [1 pt] Peut-on en déduire sans calcul les flux sortants $\Phi_S(\overrightarrow{V_1})$ et $\Phi_S(\overrightarrow{V_2})$ de $\overrightarrow{V_1}$ et de $\overrightarrow{V_2}$ à travers S ?

6) [1.5 pts] Vérifiez que le champ $\overrightarrow{U}$ donné par
$$\overrightarrow{U} = (\sin y + \sin z + yz)\vec{\imath} + (\sin z + \sin x + zx)\vec{\jmath} + (\sin x + \sin y + xy)\vec{k}$$
est un potentiel vectoriel de celui des deux champs $\overrightarrow{V}_1$, $\overrightarrow{V}_2$ qui est incompressible.

7) [1.5 pts] Soit C le cercle $\{x^2+y^2=1, z=0\}$ de $\mathbb{R}^3$ orienté dans le sens trigonométrique, D le disque $\{x^2+y^2\leq 1, z=0\}$ orienté par la normale $\overrightarrow{k}$ et S la demi-sphère $\{x^2+y^2+z^2=1, 0\leq z\}$ orientée par la normale sortante $\overrightarrow{e_r}$. Faire un dessin faisant apparaître C, D, S, l'orientation de C et une normale pour chacune des surfaces D et S.

8) [1 pt] Les flux $\Phi_D(\overrightarrow{V_1})$ et $\Phi_S(\overrightarrow{V_1})$ de $\overrightarrow{V_1}$ à travers D et S sont-ils égaux ? On justifiera sa réponse.

TSVP

Exercice 2 [4 pts] – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ défini par

$$\overrightarrow{V}(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}).$$

a) [1 pt] Écrire le champ $\overrightarrow{V}$ en coordonnées sphériques.

b) [1 pt] Donner une paramétrisation f de la demi-sphère supérieure S de centre l'origine et de rayon 1.

c) [2 pts] Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S.

Exercice 3 [4 pts] – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{i} + 2x\overrightarrow{j}$.

1) [1 pt] Dessiner le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ aux neuf points $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, -1)$, $(\pm 1, 1)$ et $(0, 0)$.

2) [1 pt] On considère une ligne de champ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ de $\overrightarrow{V}$. Écrire les deux équations différentielles du premier ordre satisfaites par $x(t)$ et $y(t)$.

3) [1 pt] Résoudre ces équations pour trouver une expression explicite de $\gamma(t)$ en fonction de t et du point (x_0, y_0) par lequel passe γ en $t = 0$

4) [1 pt] Faire figurer sur le dessin la ligne de champ passant par le point $(0, 0)$ en $t = 0$. Quelle est sa nature géométrique ?