Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math. Complémentaires**

Corrigé de l'examen final du mardi 30 avril 2024

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [12 pts] – On considère les deux champs de vecteurs $\overrightarrow{V}_1$ et $\overrightarrow{V}_2$ définis sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}_1(x,y,z) &= (\cos y - \cos z)\,\overrightarrow{i} + (\cos z - \cos x)\,\overrightarrow{j} + (\cos x - \cos y)\,\overrightarrow{k}\\ \overrightarrow{V}_2(x,y,z) &= \cos x\,\overrightarrow{i} + \cos y\,\overrightarrow{j} + \cos z\,\overrightarrow{k}\,.\end{aligned}$$

1) [2.5 pts] Montrer que l'un des champs est un champ de gradient (c'est-à-dire qu'il admet un potentiel scalaire) et que l'autre est un champ rotationnel (c'est-à-dire qu'il admet un potentiel vecteur).

2) [1.5 pts] Déterminer un potentiel scalaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ du champ de vecteurs dont le rotationnel est nul.

3) [1 pt] Calculer les circulations $\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{V_1})$ et $\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{V_2})$ de $\overrightarrow{V_1}$ et de $\overrightarrow{V_2}$ le long du chemin $\gamma : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$ défini par
$$\gamma(t) = (t, t, t).$$

4) [2 pts] On note Ω le cube $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ et S la surface de ce cube orientée avec la normale sortante. Calculer
$$I_1 = \iiint_\Omega \operatorname{div}\overrightarrow{V_1}\,dxdydz \quad \text{et} \quad I_2 = \iiint_\Omega \operatorname{div}\overrightarrow{V_2}\,dxdydz.$$

5) [1 pt] Peut-on en déduire sans calcul les flux sortants $\Phi_S(\overrightarrow{V_1})$ et $\Phi_S(\overrightarrow{V_2})$ de $\overrightarrow{V_1}$ et de $\overrightarrow{V_2}$ à travers S ?

6) [1.5 pts] Vérifiez que le champ $\overrightarrow{U}$ donné par
$$\overrightarrow{U} = (\sin y + \sin z + yz)\vec{\imath} + (\sin z + \sin x + zx)\vec{\jmath} + (\sin x + \sin y + xy)\vec{k}$$
est un potentiel vectoriel de celui des deux champs $\overrightarrow{V}_1$, $\overrightarrow{V}_2$ qui est incompressible.

7) [1.5 pts] Soit C le cercle $\{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$ orienté dans le sens trigonométrique, D le disque $\{x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ orienté par la normale $\overrightarrow{k}$ et S la demi-sphère $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1, 0 \leq z\}$ orientée par la normale sortante $\overrightarrow{e_r}$. Faire un dessin faisant apparaître C, D, S, l'orientation de C et une normale pour chacune des surfaces D et S.

8) [1 pt] Les flux $\Phi_D(\overrightarrow{V_1})$ et $\Phi_S(\overrightarrow{V_1})$ de $\overrightarrow{V_1}$ à travers D et S sont-ils égaux ? On justifiera sa réponse.

Rép.– 1) Le calcul du rotationnel de $\overrightarrow{V_1}$ donne

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos y - \cos z \\ \cos z - \cos x \\ \cos x - \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin y + \sin z \\ \sin z + \sin x \\ \sin x + \sin y \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}.$$

Le champ $\overrightarrow{V_1}$ n'est donc pas un champ de gradient. En revanche

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos y \\ \cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}.$$

Puisque le champ $\overrightarrow{V_2}$ est défini sur $\mathbb{R}^3$ qui est simplement connexe, le lemme de Poincaré permet d'affirmer que $\overrightarrow{V_2}$ est un champ de gradient.
Similairement

$$\mathrm{div}\ \overrightarrow{V_1} = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{div}\ \overrightarrow{V_2} = -(\sin x + \sin y + \sin z) \neq 0.$$

Le champ $\overrightarrow{V_2}$ n'est donc pas rotationnel. En revanche puisque div $\overrightarrow{V_1} = 0$ est défini sur $\mathbb{R}^3$ qui est contractile, le lemme de Poincaré permet d'affirmer que $\overrightarrow{V_2}$ est un champ rotationnel.
2) On doit résoudre $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f$ c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \cos x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \cos y \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = & \cos z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} f(x,y,z) & = & \sin x + C_1(y,z) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \cos y \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = & \cos z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} f(x,y,z) & = & \sin x + C_1(y,z) \\ 0 + \dfrac{\partial C_1}{\partial y} & = & \cos y \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = & \cos z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} f(x,y,z) & = & \sin x + C_1(y,z) \\ C_1(y,z) & = & \sin y + C_2(z) \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = & \cos z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} f(x,y,z) & = & \sin x + C_1(y,z) \\ C_1(y,z) & = & \sin y + C_2(z) \\ 0 + \dfrac{\partial C_2}{\partial z} & = & \cos z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} f(x,y,z) & = & \sin x + C_1(y,z) \\ C_1(y,z) & = & \sin y + C_2(z) \\ C_2(z) & = & \sin z + Cte \end{array}\right.$$

Ainsi, les potentiels scalaires de $\overrightarrow{V}_2$ sont les fonctions

$$f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z + Cte.$$

3) Par définition de la circulation

$$\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{V_1}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle \overrightarrow{V_1}(\gamma(t)), \overrightarrow{\gamma}'(t)\rangle dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \langle \begin{pmatrix} \cos y - \cos z \\ \cos z - \cos x \\ \cos x - \cos y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle dt = 0.$$

Puisque $\overrightarrow{V}_2$ est un champ de gradient, le calcul de la circulation pour ce champ est plus direct. 0n a

$$\mathcal{C}_\gamma(\overrightarrow{V_2}) = f(\gamma(\pi/2)) - f(\gamma(0)) = 3.$$

4) Puisque div $\overrightarrow{V_1} = 0$ on a immédiatement

$$I_1 = \iiint_\Omega \mathrm{div}\overrightarrow{V_1}\, dxdydz = 0.$$

Le second calcul est moins immédiat :

$$\begin{aligned} I_2 &= \iiint_\Omega \mathrm{div}\overrightarrow{V_2}\, dxdydz \\ &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} -(\sin x + \sin y + \sin z)\, dxdydz \\ &= -\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} [\cos x + x\sin y + x\sin z]_0^{\pi/2}\ dydz \\ &= -\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \left(-1 + \frac{\pi}{2}\sin y + \frac{\pi}{2}\sin z\right) dydz \\ &= -\int_0^{\pi/2} \left[-y + \frac{\pi}{2}\cos y + \frac{\pi}{2} y \sin z\right]_0^{\pi/2} dz \\ &= -\int_0^{\pi/2} \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}\sin z\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right) dz \\ &= -\int_0^{\pi/2} \frac{\pi^2}{4}\sin z - \pi\, dz \\ &= -\left[\frac{\pi^2}{4}\cos z - \pi z\right]_0^{\pi/2} = -\frac{3\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Une autre façon de faire ce calcul est la suivante :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \iiint_\Omega \operatorname{div}(\overrightarrow{V_2})dxdydz \\
&= \iiint_\Omega -(\sin x + \sin y + \sin z)dxdydz \\
&= \iiint_\Omega (-\sin x)dxdydz + \iiint_\Omega (-\sin y)dxdydz + \iiint_\Omega (-\sin z)dxdydz \\
&= \int_0^{\pi/2} dy \int_0^{\pi/2} dz \int_0^{\pi/2} (-\sin x)dx + \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} dz \int_0^{\pi/2} (-\sin y)dy + \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2} dy \int_0^{\pi/2} (-\sin z)dz \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \left(\big[\cos x\big]_0^{\pi/2} + \big[\cos y\big]_0^{\pi/2} + \big[\cos z\big]_0^{\pi/2} \right) \\
&= -\frac{3\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

5) Le théorème d'Ostrogradski affirme que

$$\Phi_S(\overrightarrow{V}) = \iiint_\Omega \operatorname{div} \overrightarrow{V} dxdydz$$

où $\Phi_S(\overrightarrow{V})$ est le flux sortant de $\overrightarrow{V}$ à travers S. Ainsi

$$\Phi_S(\overrightarrow{V_1}) = I_1 = 0 \quad \text{et} \quad \Phi_S(\overrightarrow{V_2}) = I_2 = -\frac{3\pi^2}{4}.$$

6) D'après 1), c'est du champ $\overrightarrow{V_1}$ dont il s'agit. On doit vérifier que :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sin y + \sin z + yz \\ \sin z + \sin x + zx \\ \sin x + \sin y + xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos y - \cos z \\ \cos z - \cos x \\ \cos x - \cos y \end{pmatrix}$$

ce qui est un simple calcul.

7) et 8) D'après le théorème de Green-Stokes-Ampère, puisque $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{U_0}$ on a

$$\mathcal{C}_C(\overrightarrow{U_0}) = \Phi_D(\overrightarrow{V_1}) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_C(\overrightarrow{U_0}) = \Phi_S(\overrightarrow{V_1})$$

ainsi $\Phi_D(\overrightarrow{V_1}) = \Phi_S(\overrightarrow{V_1})$.

Exercice 2 [4 pts] – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ défini par

$$\overrightarrow{V}(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}).$$

a) [1 pt] Écrire le champ $\overrightarrow{V}$ en coordonnées sphériques.

b) [1 pt] Donner une paramétrisation f de la demi-sphère supérieure S de centre l'origine et de rayon 1.

c) [2 pts] Calculer le flux de $\overrightarrow{V}$ à travers S.

Rép.– 1) Puisque

$$\overrightarrow{e_r} = \frac{x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

on déduit $\overrightarrow{V}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)\overrightarrow{e_r}$ et donc

$$\overrightarrow{V}(r, \theta, \varphi) = r^2\overrightarrow{e_r}$$

2) D'après le cours, une paramétrisation de la sphère de centre l'origine et de rayon 1 est donnée par

$$\begin{array}{cccc} f & [0, \pi] \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\theta, \varphi) & \longmapsto & \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

3) On a

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \sin\theta \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \sin\theta\,\overrightarrow{e_r}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\Phi_S(\overrightarrow{V}) &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \langle \overrightarrow{V}(f(\theta,\varphi)), \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\wedge\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)(\theta,\varphi)\rangle d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \langle \overrightarrow{e_r}, \sin\theta\,\overrightarrow{e_r}\rangle d\varphi d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sin\theta\, d\varphi d\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Exercice 3 [4 pts] – On considère le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{i} + 2x\overrightarrow{j}$.

1) [1 pt] Dessiner le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}$ aux neuf points $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, -1)$, $(\pm 1, 1)$ et $(0, 0)$.
2) [1 pt] On considère une ligne de champ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ de $\overrightarrow{V}$. Écrire les deux équations différentielles du premier ordre satisfaites par $x(t)$ et $y(t)$.
3) [1 pt] Résoudre ces équations pour trouver une expression explicite de $\gamma(t)$ en fonction de t et du point (x_0, y_0) par lequel passe γ en $t = 0$
4) [1 pt] Faire figurer sur le dessin la ligne de champ passant par le point $(0, 0)$ en $t = 0$. Quelle est sa nature géométrique ?

Rép.– 1) Le dessin est facilité car le champ ne dépend de y. Il est donc invariant par toute translation verticale. Il suffit donc de dessiner le champ sur les trois points $(-1, 0)$, $(0, 0)$ et $(1, 0)$ puis d'effectuer une translation verticale pour les six autres points.
2) Si γ est une ligne de champ, il satisfait à l'équation $\overrightarrow{\gamma}'(t) = \overrightarrow{V}(\gamma(t))$ qui s'écrit ici

$$\begin{cases} x'(t) &= 1 \\ y'(t) &= 2x(t). \end{cases}$$

3) Les équations des lignes de champ se résolvent de la façon suivante :

$$\begin{cases} x'(t) &= 1 \\ y'(t) &= 2x(t). \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) &= t + x_0 \\ y'(t) &= 2x(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) &= t + x_0 \\ y'(t) &= 2t + 2x_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) &= t + x_0 \\ y(t) &= t^2 + 2x_0 t + y_0. \end{cases}$$

4) La ligne de champ passant par $(0, 0)$ en $t = 0$ est celle pour laquelle $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$. On obtient donc $\gamma(t) = (t, t^2)$. La trajectoire est donc une parabole.