Université Claude Bernard Lyon 1 **PCSI L1 - UE Math 2**

Examen terminal, session 1 – Lundi 5 mai 2025 - Durée 1h

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [11 pts] – Soient $0 < \alpha < 1$ et f la fonction définie par $f(x, y) = x^2 - 2xy + \alpha y^3$.

1) [1 pt] Montrer que le point $A = (1 + \sqrt{1 - \alpha}, 1)$ appartient à $L_0(f)$, la ligne de niveau 0 de f.
2) [1 pt] Les points $B = (\sqrt{\alpha}, 0)$ et $C = (0, 1)$ appartiennent-ils à une même ligne de niveau de f ?
3) [2 pts] On se place au point $D = (\alpha, 1)$. Laquelle des deux directions $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ donne une pente croissante en D ?
4) [1 pt] Montrer que f possède deux points critiques dont on déterminera les coordonnées en fonction de α.
5) [1.5 pt] Déterminer la nature de chaque point critique.
6) [1.5 pt] Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au point $(0, 0)$
7) [1 pt] On considère la fonction g définie par $g(x, y) = f^2(x, y)$. Calculer les dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$$

en fonction de f et de ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

8) [0.5 pt] Déduire de la question 7 que

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, g(x, y) = 2f(x, y) \times \overrightarrow{\text{grad}}\, f(x, y).$$

9) [0.5 pt] Montrer que les deux points critiques de f sont aussi deux points critiques de g.
10) [1 pt] À votre avis, l'affirmation suivante est-elle vraie : "Tous les points de la ligne $L_0(f)$ de niveau 0 de f sont des points critiques de g." Justifier votre réponse.

Exercice 2 [10 pts] – Dans le plan (Oxy), on considère la demi-couronne

$$C = \{(x, y) \mid \frac{1}{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1, 0 \leq y\}.$$

1) [1 pt] Écrire l'ensemble C en coordonnées polaires.
2) [1 pt] Dessiner l'ensemble C en faisant apparaître les axes de coordonnées.
3) [0.5 pt] Que représente l'intégrale double

$$A = \iint_C dxdy \quad ?$$

4) [1 pt] Calculer la valeur de A.
5) [1 pt] On considère dans $\mathbb{R}^3$ le solide semi-cylindrique

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid \frac{1}{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1,\, 0 \leq y,\, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Faire un dessin soigné faisant de Ω faisant apparaître les axes de coordonnées.

TSVP

6) [0.5 pt] Écrire en coordonnées cylindriques l'ensemble Ω.

7) [1 pt] Déterminer le volume V de Ω.

8) [1.5 pt] On suppose que la densité de masse est donnée par

$$\mu(x, y, z) = e^z.$$

Trouver la masse totale M de Ω.

9) [2.5 pts] On note $G(x_G, y_G, z_G)$ le barycentre de Ω.

a) Dire pourquoi $x_G = 0$.

b) Déterminer z_G (*Indication* : le calcul nécessite une intégration par parties).

c) À votre avis, a-t-on $y_G = 0$? Justifier.