

Examen terminal, session 1 – 11 mai 2026 - Durée 1h

**Règlement** – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

**Exercice 1 [12.5 pts]** – Soient  $\alpha \neq 0$  et  $f$  la fonction définie par  $f(x, y) = x^4 - x^2 + \alpha(x + y)^2$ .

1. [0.5 pt] Quel est le domaine de définition de  $f$  ?
2. [0.5 pt] Montrer que les points  $A = (1, -1)$  et  $B = (-1, 1)$  appartiennent à la même ligne de niveau de  $f$  que l'on précisera.
3. [1 pt] Pour quelle(s) valeur(s) de  $\alpha$  le point  $C = \left(\sqrt{\frac{1}{2} + |\alpha|}, -\sqrt{\frac{1}{2} + |\alpha|}\right)$  appartient-il à la ligne  $L_0(f)$  de niveau zéro de  $f$  ?
4. [0.5 pt] Calculer le gradient de  $f$ .
5. [1 pt] On se place au point  $D = (1, y)$  où  $y$  est quelconque. Montrer qu'en ce point la fonction  $f$  est croissante dans la direction  $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ .
6. [1.5 pts] Montrer que  $f$  possède trois points critiques dont on déterminera les coordonnées.
7. [1.5 pts] Déterminer la nature de chaque point critique (point plat, point col, minimum local ou maximum local) en fonction du signe de  $\alpha$ .
8. [1.5 pts] Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de  $f$  au point  $(0, 0)$ .
9. [1 pt] On considère l'application  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \left(\sqrt{\frac{1}{2} + t^2}, t^2 - \sqrt{\frac{1}{2} + t^2}\right).$$

Calculer la Jacobienne de  $\gamma$  en  $t$  (on rappelle que  $(u^{1/2})' = \frac{1}{2}u'u^{-1/2}$ ).

10. [1 pt] Montrer que la matrice jacobienne de  $f$  en  $\gamma(t)$  vaut

$$(\text{Jac } f)_{\gamma(t)} = \begin{pmatrix} 4t^2\sqrt{\frac{1}{2} + t^2} + 2\alpha t^2 & 2\alpha t^2 \end{pmatrix}$$

11. [1.5 pts] On pose  $g = f \circ \gamma$ . Calculer la dérivée de  $g$  en utilisant la règle de la chaîne et montrer que celle-ci est identiquement nulle si  $\alpha = -1$ .
12. [1 pt] À votre avis, l'affirmation suivante est-elle vraie : "Lorsque  $\alpha = -1$ , tous les points  $\gamma(t)$  sont situés sur une même ligne de niveau de  $f$ " ? Justifier votre réponse.

**Exercice 2 [8.5 pts]**– Soit  $R > 0$ . Dans  $\mathbb{R}^2$ , on considère l'ensemble

$$D = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq R, 0 \leq x, 0 \leq y\}.$$

1. [1 pt] Faire un dessin soigné de l'ensemble  $D$  faisant apparaître les axes de coordonnées.

TSVP

2. [0.5 pt] Écrire l'ensemble  $D$  en coordonnées polaires.
3. [0.5 pt] Que représente l'intégrale double  $A = \iint_D dx dy$ ?
4. [0.5 pt] Calculer la valeur de  $A$ .

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère le solide

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq R, 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z\}.$$

5. [1,25 pts] Faire un dessin soigné de  $\Omega$  faisant apparaître les axes de coordonnées.
6. [0.75 pt] Écrire l'ensemble  $\Omega$  en coordonnées sphériques.
7. [1 pt] On suppose que la densité de masse est donnée par

$$\mu(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Quels sont les points de  $\Omega$  où la densité est la plus faible et quelle est alors sa valeur? Que se passe-t-il lorsque le point  $(x, y, z)$  tend vers l'origine?

8. [1 pt] Trouver la masse totale  $M$  de  $\Omega$ .
9. [2 pts] On note  $G(x_G, y_G, z_G)$  le barycentre de  $\Omega$ .
  - a. Expliquer pourquoi  $x_G = y_G = z_G$ .
  - b. Déterminer  $z_G$  (*Indication* :  $(\sin^2 \theta)' = 2 \cos \theta \sin \theta$ ).