**Université Claude Bernard Lyon 1** **PCSI L1 - UE Math 2**

## Corrigé de l'examen terminal 1 – 11 mai 2026

**Règlement** – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

---

**Exercice 1 [12.5 pts]** – Soient $\alpha \neq 0$ et $f$ la fonction définie par $f(x, y) = x^4 - x^2 + \alpha(x + y)^2$.

1. [0.5 pt] Quel est le domaine de définition de $f$ ?
2. [0.5 pt] Montrer que les points $A = (1, -1)$ et $B = (-1, 1)$ appartiennent à la même ligne de niveau de $f$ que l'on précisera.
3. [1 pt] Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha$ le point $C = \left(\sqrt{\frac{1}{2} + |\alpha|}, -\sqrt{\frac{1}{2} + |\alpha|}\right)$ appartient-il à la ligne $L_0(f)$ de niveau zéro de $f$ ?
4. [0.5 pt] Calculer le gradient de $f$.
5. [1 pt] On se place au point $D = (1, y)$ où $y$ est quelconque. Montrer qu'en ce point la fonction $f$ est croissante dans la direction $\vec{v} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$.
6. [1.5 pts] Montrer que $f$ possède trois points critiques dont on déterminera les coordonnées.
7. [1.5 pts] Déterminer la nature de chaque point critique (point plat, point col, minimum local ou maximum local) en fonction du signe de $\alpha$.
8. [1.5 pts] Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de $f$ au point $(0, 0)$.
9. [1 pt] On considère l'application $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par
$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \left(\sqrt{\frac{1}{2} + t^2}, t^2 - \sqrt{\frac{1}{2} + t^2}\right).$$
Calculer la Jacobienne de $\gamma$ en $t$ (on rappelle que $(u^{1/2})' = \frac{1}{2}u'u^{-1/2}$).
10. [1 pt] Montrer que la matrice jacobienne de $f$ en $\gamma(t)$ vaut
$$(\operatorname{Jac} f)_{\gamma(t)} = \begin{pmatrix} 4t^2\sqrt{\frac{1}{2} + t^2} + 2\alpha t^2 & 2\alpha t^2 \end{pmatrix}$$
11. [1.5 pts] On pose $g = f \circ \gamma$. Calculer la dérivée de $g$ en utilisant la règle de la chaîne et montrer que celle-ci est identiquement nulle si $\alpha = -1$.
12. [1 pt] À votre avis, l'affirmation suivante est-elle vraie : "Lorsque $\alpha = -1$, tous les points $\gamma(t)$ sont situés sur une même ligne de niveau de $f$" ? Justifier votre réponse.

**Réponse**
1) On a
$$f(A) = f(1, -1) = 1^4 - 1^2 + \alpha(1 - 1) = 0 \text{ et } f(B) = f(-1, 1) = (-1)^4 - (-1)^2 + \alpha(-1 + 1) = 0$$
Ainsi $A$ et $B$ appartiennent tous les deux à la ligne $L_0(f)$ de niveau zéro de $f$.
2) Le calcul donne
$$\begin{aligned} f(C) &= \left(\sqrt{\frac{1}{2} + |\alpha|}\right)^4 - \left(\sqrt{\frac{1}{2} + |\alpha|}\right)^2 + \alpha\left(\sqrt{\frac{1}{2} + |\alpha|} - \sqrt{\frac{1}{2} + |\alpha|}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + |\alpha|\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + |\alpha|\right) \\ &= \alpha^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ainsi $C \in L_{\alpha^2-\frac{1}{4}}(f)$. Par conséquent $C \in L_0(f)$ si et seulement si $\alpha = \pm\frac{1}{2}$.
3) Le calcul du gradient de $f$ donne

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x,y) = \left(4x^3 - 2x + 2\alpha(x+y)\right)\vec{\imath} + 2\alpha(x+y)\vec{\jmath}.$$

Au point $D = (1,y)$ on a donc

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f(1,y) = (2 + 2\alpha(1+y))\,\vec{\imath} + 2\alpha(1+y)\vec{\jmath}$$

Ainsi,

$$\langle \overrightarrow{\text{grad}}\, f(1,y), \overrightarrow{v}\rangle = \langle \overrightarrow{\text{grad}}\, f(1,y), \vec{\imath} - \vec{\jmath}\rangle = 2 > 0.$$

On en déduit que $f$ est croissante en $D$ dans la direction $\overrightarrow{v}$.
4) On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4x^3 - 2x + 2\alpha(x+y) & = & 0 \\ 2\alpha(x+y) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4x^3 - 2x & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right.$$

Notons que l'on a pu simplifier par $\alpha$ car d'après l'énoncé $\alpha \neq 0$. Par conséquent $f$ admet trois points critiques : $(0,0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
5) On a

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 + 2\alpha & 2\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha \end{pmatrix}$$

d'où

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2+2\alpha & 2\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha \end{pmatrix}, \qquad H_f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} 4+2\alpha & 2\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_f(\frac{1}{-\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \begin{pmatrix} 4+2\alpha & 2\alpha \\ 2\alpha & 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Ainsi
- det $H_f(0,0) = -4\alpha$ donc $(0,0)$ est un point col si $\alpha > 0$ et un extremum local si $\alpha < 0$. Dans ce dernier cas, puisque $tr\, H_f(0,0) = -2 + 4\alpha < 0$, le point $(0,0)$ est un maximum local.
- det $H_f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 8\alpha$. C'est donc un point col si $\alpha < 0$ et un extremum local si $\alpha > 0$ Dans ce dernier cas, puisque $tr\ H_f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4(1+\alpha) > 0$, le point $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ est un minimum local.
- det $H_f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 8\alpha$. C'est donc un point col si $\alpha < 0$ et un extremum local si $\alpha > 0$ Dans ce dernier cas, puisque $tr\ H_f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = 4(1+\alpha) > 0$, le point $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ est un minimum local.

6) On peut remarquer que $f$ est polynomiale ou s'appuyer sur les calculs des questions précédentes pour obtenir que

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & -x^2 + \alpha(x+y)^2 + o(x^2+y^2) \\ & = & (\alpha-1)x^2 + 2\alpha xy + \alpha y^2 + o(x^2+y^2). \end{array}$$

7) Notons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, la matrice jacobienne de $\gamma$ en $t$ est donnée par

$$(\text{Jac}\,\gamma)_t = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\left(\dfrac{1}{2} + t^2\right)^{-1/2} \\ 2t - t\left(\dfrac{1}{2} + t^2\right)^{-1/2} \end{pmatrix}$$

8) La jacobienne de $f$ en $\gamma(t)$ est donnée par

$$(\text{Jac}\, f)_{\gamma(t)} = \left(4x(t)^3 - 2x(t) + 2\alpha(x(t)+y(t)), \quad 2\alpha(x(t)+y(t))\right)$$

L'expression de $\gamma(t)$ montre que $x(t) + y(t) = t^2$ et que

$$\begin{array}{rcl} 4x^3(t) - 2x(t) & = & x(t)(4x^2(t) - 2) \\ & = & \sqrt{\dfrac{1}{2} + t^2}\left(4\left(\sqrt{\dfrac{1}{2} + t^2}\right)^2 - 2\right) \\ & = & 4t^2\sqrt{\dfrac{1}{2} + t^2} \end{array}$$

On obtient donc

$$(\text{Jac}\, f)_{\gamma(t)} = \left(4t^2\sqrt{\frac{1}{2} + t^2} + 2\alpha t^2, 2\alpha t^2\right)$$

9) On écrit la règle de la chaîne au moyen des matrices jacobiennes

$$g'(t) = (\mathrm{Jac}g)_{\gamma(t)} \cdot (\mathrm{Jac}\gamma)_t = \left(t^2\sqrt{\frac{1}{2}+t^2} + 2\alpha t^2, 2\alpha t^2\right) \begin{pmatrix} t\left(\frac{1}{2}+t^2\right)^{-1/2} \\ 2t - t\left(\frac{1}{2}+t^2\right)^{-1/2} \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g'(t) &= \left(4t^2\sqrt{\frac{1}{2}+t^2} + 2\alpha t^2\right) t\left(\frac{1}{2}+t^2\right)^{-1/2} + 2\alpha t^2\left(2t - t\left(\frac{1}{2}+t^2\right)^{-1/2}\right) \\ &= \left(4t^2\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}\right) t\left(\frac{1}{2}+t^2\right)^{-1/2} + 4\alpha t^3 \\ &= 4t^3 + 4\alpha t^3 \\ &= 4(1+\alpha)t^3. \end{aligned}$$

On constate que cette dérivée est identiquement nulle si $\alpha = -1$.

10) Sous l'hypothèse $\alpha = -1$, la fonction dérivée $g'$ est identiquement nulle. Cela signifie que la fonction $t \mapsto g(t) = f(\gamma(t))$ est constante. Donc tous les points $\gamma(t)$ appartiennent à la même ligne de niveau de $f$, celle donnée par la valeur de la constante (qui est $-\frac{1}{4}$ mais cela n'est pas demandé ici).

**Exercice 2 [8.5 pts]–** Soit $R > 0$. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère l'ensemble

$$D = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq R, 0 \leq x, 0 \leq y\}.$$

1. [1 pt] Faire un dessin soigné de l'ensemble $D$ faisant apparaître les axes de coordonnées.
2. [0.5 pt] Écrire l'ensemble $D$ en coordonnées polaires.
3. [0.5 pt] Que représente l'intégrale double $A = \iint_D dxdy$ ?
4. [0.5 pt] Calculer la valeur de $A$.

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le solide

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R,\ 0 \leq x, 0 \leq y,\ 0 \leq z\}.$$

5. [1,25 pts] Faire un dessin soigné de $\Omega$ faisant apparaître les axes de coordonnées.
6. [0.75 pt] Écrire l'ensemble $\Omega$ en coordonnées sphériques.
7. [1 pt] On suppose que la densité de masse est donnée par

$$\mu(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

   Quels sont les points de $\Omega$ où la densité est la plus faible et quelle est alors sa valeur ? Que se passe-t-il lorsque le point $(x,y,z)$ tend vers l'origine ?
8. [1 pt] Trouver la masse totale $M$ de $\Omega$.
9. [2 pts] On note $G(x_G, y_G, z_G)$ le barycentre de $\Omega$.
   a. Expliquer pourquoi $x_G = y_G = z_G$.
   b. Déterminer $z_G$ (*Indication* : $(\sin^2\theta)' = 2\cos\theta\sin\theta$).

**Réponse**

1) En coordonnées polaires, le quart de disque s'écrit

$$C = \{(\rho,\varphi) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

2) DESSIN
3) L'integrale $A$ représente l'aire du quart de disque.
4) En passant en coordonnées polaires on trouve

$$A = \int_{\rho=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \rho d\rho d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_{\rho=0}^{R} \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_0^R = \frac{\pi}{2} \left( \frac{R^2}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4} R^2.$$

5) 6) L'ensemble $\Omega$ s'écrit en coordonnées sphériques sous la forme

$$\Omega = \{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}.$$

7) La densité est la plus faible là où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est maximum, c'est à dire sur le bord sphérique de $\Omega$ à distance $R$ de l'origine. La densité vaut alors $1/R$. Elle est la plus forte en l'origine. La densité vaut alors l'infini.
8) On a

$$M = \iiint_\Omega \mu(x, y, z) dx dy dz = \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \mu(r, \theta, \varphi) r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta = \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} r \sin\theta dr d\varphi d\theta$$

D'après le calcul effectué plus haut

$$\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin\theta d\varphi d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi

$$M = \frac{\pi}{2} \int_{\rho=0}^{R} r dr = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^R = \frac{\pi R^2}{4}.$$

9) a) Dans la définition de $\Omega$, les rôles de $x$, $y$ et $z$ sont parfaitement symétriques : n'importe quelle permutation des lettres $x$, $y$ et $z$ conduisent à la même écriture. Il en est de même de la densité de masse. Il s'en suit que les nombres $x_G$, $y_G$ et $z_G$ sont interchangeables, autrement dit, identiques.
b) On a

$$z_G = \frac{1}{M} \iiint_\Omega z\mu(x, y, z) dx dy dz = \frac{1}{M} \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} r\cos\theta \times \frac{1}{r} \times r^2 \sin\theta \, dr d\varphi d\theta = \frac{1}{M} \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} r^2 \cos\theta \sin\theta \, dr d\varphi d\theta$$

et donc

$$z_G = \frac{1}{M} \frac{\pi}{2} \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi/2} r^2 \cos\theta \sin\theta dr d\theta = \frac{1}{M} \frac{\pi R^3}{6} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta.$$

D'après l'indication dans l'énoncé

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \left[ \frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

En fin de compte

$$z_G = \frac{1}{M} \frac{\pi R^3}{12} = \frac{4}{\pi R^2} \frac{\pi R^3}{12} = \frac{R}{3}.$$