

Examen terminal, session 1 – Lundi 11 mai 2026 - Durée 1h

**Règlement** – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

**Exercice 1 [7 pts]** – On considère la courbe paramétrée  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par

$$\gamma(t) = (\cos(2t), \sin(2t)).$$

1. [1.5 pt] Dessiner la courbe  $\gamma$ . On fera figurer les points  $\gamma(0)$ ,  $\gamma(\pi/4)$ ,  $\gamma(\pi/2)$ ,  $\gamma(3\pi/4)$  et  $\gamma(\pi)$ , ainsi que le sens de parcours (à l'aide d'une flèche).
2. [1 pt] On considère les deux champs de vecteurs suivants

$$\vec{V}_1(\rho, \varphi) = 2\rho \vec{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \vec{V}_2(\rho, \varphi) = \frac{1}{2}\rho \vec{e}_\varphi.$$

Donner l'expression en coordonnées cartésiennes de  $\vec{V}_1$  et de  $\vec{V}_2$ .

3. [2.5 pts] Dessiner le champ de vecteurs  $\vec{V}_1$  aux neuf points  $(0, 0)$ ,  $(\pm 1, 0)$ ,  $(0, \pm 1)$ , et  $(\pm 1, \pm 1)$ . Comment obtient-on  $\vec{V}_2$  à partir de  $\vec{V}_1$  ?
4. [1 pt] Soit

$$\vec{V}(x, y) = a(x, y)\vec{i} + b(x, y)\vec{j}$$

un champ de vecteurs quelconque. On suppose que la courbe  $\gamma(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$  est une ligne de champ de  $\vec{V}$ . Quelles relations doivent alors satisfaire les fonctions  $a$  et  $b$  ?

5. [1 pt] Laquelle des affirmations suivantes est vraie ? Justifier.
  - (a) La courbe  $\gamma$  est une ligne de champ de  $\vec{V}_1$  mais pas de  $\vec{V}_2$
  - (b) La courbe  $\gamma$  est une ligne de champ de  $\vec{V}_2$  mais pas de  $\vec{V}_1$
  - (c) La courbe  $\gamma$  est une ligne de champ de  $\vec{V}_1$  et de  $\vec{V}_2$
  - (d) La courbe  $\gamma$  n'est ni une ligne de champ de  $\vec{V}_1$ , ni une ligne de champ de  $\vec{V}_2$

**Exercice 2 [8 pts]** – Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables de classe  $C^2$ . On considère les deux champs de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  suivants

$$\vec{V}(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \vec{j} + 0\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{B}(x, y) = f(x, y)\vec{k}$$

1. [1 pt] Montrer que :  $\text{div } \vec{V} = \Delta f$  où  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  est le *laplacien* de  $f$ .
2. [0.5 pt] On suppose dans cette question que  $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  où  $a, b$  et  $c$  sont des réels quelconques. Montrer que  $\Delta f$  est une fonction constante.

TSVP

3. [1 pt] On suppose dans cette question que  $f$  est une fonction quelconque telle que  $\Delta f$  est la fonction constante égale à 1. Calculer le flux de  $\vec{V}$  au travers de la sphère  $S$  de centre l'origine, de rayon 1 et orientée par la normale sortante. *On rappelle que le volume d'une sphère pleine de rayon  $R$  est  $\frac{4}{3}\pi R^3$ .*
4. [1 pt] Déterminer  $\operatorname{rot} \vec{V}$ .
5. [1 pt] Soient  $\Sigma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$  et  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  la courbe paramétrée donnée par

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, 0).$$

Laquelle des affirmations suivantes est vraie? Justifier.

- (a) L'ensemble  $\Sigma$  est un cylindre dont la courbe  $\gamma$  parcourt l'un des bords.
  - (b) L'ensemble  $\Sigma$  est un cercle qui est parcouru par  $\gamma$ .
  - (c) L'ensemble  $\Sigma$  est un disque dont le bord est parcouru par  $\gamma$ .
  - (d) Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.
6. [2 pts] On suppose dans cette question que  $f$  est une fonction quelconque telle que  $\Delta f$  est la fonction constante égale à 1. Déterminer la circulation de  $\vec{V}$  le long de la courbe  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  donnée à la question précédente.
  7. [0.5 pt] Déterminer  $\operatorname{rot} \vec{B}$ .
  8. [1 pt] Montrer que le champ  $\vec{W} = \vec{V} + \operatorname{rot} \vec{B}$  admet un potentiel scalaire et le déterminer.

**Exercice 3 [6 pts]** – On considère le champ de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  défini par

$$\vec{U}(x, y, z) = (y - 1 + z^2)\vec{i} + (1 - z^2 - x)\vec{j} + 0\vec{k}.$$

1. [1.5 pts] Le champ  $\vec{U}$  est-il incompressible? Admet-il un potentiel vectoriel?
2. [1.5 pts] Déterminer un potentiel vectoriel  $\vec{A}$  de  $\vec{U}$  de la forme

$$\vec{A} = a(z)(\vec{i} + \vec{j}) + (b(x) + c(y))\vec{k}$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des fonctions d'une variable.

3. [1 pt] Calculer la circulation  $C_C(\vec{A})$  de  $\vec{A}$  le long d'un cercle  $\mathcal{C}^+$  de centre l'origine, de rayon 1, contenu dans le plan horizontal ( $Oxy$ ) et parcouru dans le sens trigonométrique (inverse de celui des aiguilles d'une montre).
4. [1 pt] On considère l'hémisphère nord

$$\Sigma^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

orienté par la normale sortante  $\vec{e}_r$ . Figurer sur un dessin  $\mathcal{C}^+$  et  $\Sigma^+$  ainsi que leurs orientations. Les orientations de  $\Sigma^+$  et de  $\mathcal{C}^+$  sont-elles compatibles?

5. [1 pt] En s'appuyant sur les questions précédentes, calculer le flux sortant  $\Phi_{\Sigma}(\vec{U})$  de  $\vec{U}$  à travers  $\Sigma^+$ .