

Corrigé de l'examen terminal 1 – Lundi 11 mai 2026

Règlement – Une feuille recto-verso manuscrite de notes est autorisée ainsi que la feuille formulaire *Repères mobiles et champs vectoriels*. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints. Le barème des exercices est indiqué entre crochets. Les **réponses doivent être justifiées**.

Exercice 1 [7 pts] – On considère la courbe paramétrée $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\gamma(t) = (\cos(2t), \sin(2t)).$$

1. [1.5 pt] Dessiner la courbe γ . On fera figurer les points $\gamma(0)$, $\gamma(\pi/4)$, $\gamma(\pi/2)$, $\gamma(3\pi/4)$ et $\gamma(\pi)$, ainsi que le sens de parcours (à l'aide d'une flèche).
2. [1 pt] On considère les deux champs de vecteurs suivants

$$\vec{V}_1(\rho, \varphi) = 2\rho \vec{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \vec{V}_2(\rho, \varphi) = \frac{1}{2}\rho \vec{e}_\varphi.$$

Donner l'expression en coordonnées cartésiennes de \vec{V}_1 et de \vec{V}_2 .

3. [2.5 pts] Dessiner le champ de vecteurs \vec{V}_1 aux neuf points $(0, 0)$, $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, et $(\pm 1, \pm 1)$. Comment obtient-on \vec{V}_2 à partir de \vec{V}_1 ?
4. [1 pt] Soit

$$\vec{V}(x, y) = a(x, y)\vec{i} + b(x, y)\vec{j}$$

un champ de vecteurs quelconque. On suppose que la courbe $\gamma(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$ est une ligne de champ de \vec{V} . Quelles relations doivent alors satisfaire les fonctions a et b ?

5. [1 pt] Laquelle des affirmations suivantes est vraie ? Justifier.
 - (a) La courbe γ est une ligne de champ de \vec{V}_1 mais pas de \vec{V}_2
 - (b) La courbe γ est une ligne de champ de \vec{V}_2 mais pas de \vec{V}_1
 - (c) La courbe γ est une ligne de champ de \vec{V}_1 et de \vec{V}_2
 - (d) La courbe γ n'est ni une ligne de champ de \vec{V}_1 , ni une ligne de champ de \vec{V}_2

Réponse

1) La courbe γ parcourt un cercle de rayon 1 et on a

$$\gamma(0) = \gamma(\pi) = (1, 0), \quad \gamma(\pi/4) = (0, 1), \quad \gamma(\pi/2) = (-1, 0), \quad \text{et} \quad \gamma(3\pi/4) = (0, -1).$$

2) D'après le cours (ou la fiche formulaire) on a

$$\vec{e}_\varphi = \frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et donc} \quad \rho \vec{e}_\varphi = -y\vec{i} + x\vec{j}.$$

Il s'en suit que

$$\vec{V}_1 = 2(-y\vec{i} + x\vec{j}) \quad \text{et} \quad \vec{V}_2 = \frac{1}{2}(-y\vec{i} + x\vec{j}).$$

3) Notons $\vec{V}_0(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ le champ tournant présenté dans le cours. On a $\vec{V}_1 = 2\vec{V}_0$ et $\vec{V}_2 = \frac{1}{2}\vec{V}_0$. Le dessin du champ \vec{V}_1 s'obtient donc en doublant la taille des flèches dans le dessin du cours figurant \vec{V}_0 . Pour \vec{V}_2 , on divise par deux la taille des

flèches de \vec{V}_0 .

4) Une courbe paramétrée quelconque $t \mapsto \gamma(t)$ est une ligne du champ \vec{V} si $\vec{\gamma}'(t) = \vec{V}(\gamma(t))$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} x'(t) &= a(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= b(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Puisque $x(t) = \cos 2t$ et $y(t) = \sin 2t$, on obtient

$$\begin{cases} -2 \sin 2t &= a(\cos 2t, \sin 2t) \\ 2 \cos 2t &= b(\cos 2t, \sin 2t) \end{cases}$$

5) Concernant le champ \vec{V}_1 , on a $a_1(x, y) = -2y$ et $b_1(x, y) = 2x$, tandis que pour \vec{V}_2 , $a_2(x, y) = -\frac{1}{2}y$ et $b_2(x, y) = \frac{1}{2}x$. Par conséquent

$$a_1(\cos 2t, \sin 2t) = -2 \sin 2t, b_1(\cos 2t, \sin 2t) = 2 \cos 2t \quad \text{et} \quad a_2(\cos 2t, \sin 2t) = -\frac{1}{2} \sin 2t, b_2(\cos 2t, \sin 2t) = \frac{1}{2} \cos 2t.$$

Par conséquent, seul le champ \vec{V}_1 satisfait aux relations obtenues à la question précédente. Ceci montre que l'affirmation (a) est vraie et que toutes les autres sont fausses.

Exercice 2 [8 pts] – Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe C^2 . On considère les deux champs de vecteurs de \mathbb{R}^3 suivants

$$\vec{V}(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \vec{j} + 0\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{B}(x, y) = f(x, y)\vec{k}$$

- [1 pt] Montrer que : $\text{div } \vec{V} = \Delta f$ où $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est le *laplacien* de f .
- [0.5 pt] On suppose dans cette question que $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ où a, b et c sont des réels quelconques. Montrer que Δf est une fonction constante.
- [1 pt] On suppose dans cette question que f est une fonction quelconque telle que Δf est la fonction constante égale à 1. Calculer le flux de \vec{V} au travers de la sphère S de centre l'origine, de rayon 1 et orientée par la normale sortante. *On rappelle que le volume d'une sphère pleine de rayon R est $\frac{4}{3}\pi R^3$.*
- [1 pt] Déterminer $\text{rot } \vec{V}$.
- [1 pt] Soient $\Sigma = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ et $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la courbe paramétrée donnée par

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, 0).$$

Laquelle des affirmations suivantes est vraie? Justifier.

- L'ensemble Σ est un cylindre dont la courbe γ parcourt l'un des bords.
 - L'ensemble Σ est un cercle qui est parcouru par γ .
 - L'ensemble Σ est un disque dont le bord est parcouru par γ .
 - Aucune des affirmations précédentes n'est vraie.
- [2 pts] On suppose dans cette question que f est une fonction quelconque telle que Δf est la fonction constante égale à 1. Déterminer la circulation de \vec{V} le long de la courbe $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée à la question précédente.
 - [0.5 pt] Déterminer $\text{rot } \vec{B}$.
 - [1 pt] Montrer que le champ $\vec{W} = \vec{V} + \text{rot } \vec{B}$ admet un potentiel scalaire et le déterminer.

Réponse

1) Calculons $\operatorname{div} \vec{V}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{V} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial z} 0 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \\ &= \Delta f(x, y)\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le théorème de Schwarz pour simplifier les dérivées secondes mixtes.

2) Un calcul direct montre que $\Delta f(x, y) = 2(a + c)$.

3) Notons B^3 la boule de rayon 1. On a $\partial B^3 = S$. En appliquant le théorème de Gauss-Ostrogradki, et puisque $\operatorname{div} \vec{V} = \Delta f = 1$, on obtient

$$\Phi_S(\vec{V}) = \iiint_{B^3} \operatorname{div} \vec{V} \, dx dy dz = \iiint_{B^3} 1 \, dx dy dz = \operatorname{Vol}(B^3) = \frac{4\pi}{3}.$$

4) Calculons $\operatorname{rot} \vec{V}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \star \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}\star &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \\ &= \Delta f(x, y)\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{rot} \vec{V} = (\Delta f) \vec{k}$.

5) L'affirmation c) est vraie. L'ensemble Σ est contenu dans le plan horizontal $\{z = 0\}$ et dans ce plan, il est constitué des points tels que

$$d^2(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1 \iff d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$$

autrement dit, des points à distance inférieure ou égale à 1 de l'origine. Cet ensemble de points forme donc un disque de rayon 1. Son bord est le cercle trigonométrique paramétrée par γ .

6) On oriente la surface Σ de façon cohérente avec γ en choisissant pour normale le vecteur \vec{k} . Le théorème de Stokes permet alors de déterminer facilement la circulation de \vec{V} le long de γ . En effet, puisque $\Delta f = 1$, on a $\operatorname{rot} \vec{V} = (\Delta f) \vec{k} = \vec{k}$ et donc

$$\mathcal{C}_\gamma(\vec{V}) = \int_0^{2\pi} \langle \vec{V}(\gamma(t)), \vec{\gamma}'(t) \rangle dt = \iint_{\Sigma} \langle \operatorname{rot} \vec{V}, \vec{k} \rangle dS = \iint_{\Sigma} \langle \vec{k}, \vec{k} \rangle dS = \operatorname{Aire}(\Sigma) = \pi.$$

7) Calculons $\operatorname{rot} \vec{B}$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

8) Il découle du calcul précédent que

$$\vec{W} = \vec{V} + \operatorname{rot} \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cette expression montre immédiatement que f est un potentiel de \vec{W} .

Exercice 3 [6 pts] – On considère le champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 défini par

$$\vec{U}(x, y, z) = (y - 1 + z^2)\vec{i} + (1 - z^2 - x)\vec{j} + 0\vec{k}.$$

- [1.5 pts] Le champ \vec{U} est-il incompressible ? Admet-il un potentiel vectoriel ?
- [1.5 pts] Déterminer un potentiel vectoriel \vec{A} de \vec{U} de la forme

$$\vec{A} = a(z)(\vec{i} + \vec{j}) + (b(x) + c(y))\vec{k}$$

où a , b et c sont des fonctions d'une variable.

- [1 pt] Calculer la circulation $C_C(\vec{A})$ de \vec{A} le long d'un cercle C^+ de centre l'origine, de rayon 1, contenu dans le plan horizontal (Oxy) et parcouru dans le sens trigonométrique (inverse de celui des aiguilles d'une montre).
- [1 pt] On considère l'hémisphère nord

$$\Sigma^+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$$

orienté par la normale sortante \vec{e}_r . Figurer sur un dessin C^+ et Σ^+ ainsi que leurs orientations. Les orientations de Σ^+ et de C^+ sont-elles compatibles ?

- [1 pt] En s'appuyant sur les questions précédentes, calculer le flux sortant $\Phi_\Sigma(\vec{U})$ de \vec{U} à travers Σ^+ .

Réponse

- Le calcul de la divergence donne $\text{div } \vec{U} = 0$. Le champ est donc incompressible. Puisque \vec{U} est défini sur \mathbb{R}^3 qui est contractile, le lemme de Poincaré implique que \vec{U} admet un potentiel vectoriel.
- On doit résoudre $\text{rot } \vec{A} = \vec{U}$ c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a(z) \\ a(z) \\ b(x) + c(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - 1 + z^2 \\ 1 - z^2 - x \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit encore

$$\begin{cases} c'(y) - a'(z) &= y - 1 + z^2 \\ a'(z) - b'(x) &= 1 - z^2 - x \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

En faisant la somme des lignes on obtient

$$c'(y) - b'(x) = y - x \iff b(x) = \frac{x^2}{2} + C_1^{te} \text{ et } c(y) = \frac{y^2}{2} + C_2^{te}$$

puis en remplaçant

$$a'(z) = 1 - z^2 \iff a(z) = z - \frac{z^3}{3} + C_3^{te}$$

On peut choisir le potentiel vectoriel pour lequel toutes les constantes sont nulles :

$$\vec{A} = a(z)(\vec{i} + \vec{j}) + (b(x) + c(y))\vec{k} = \left(z - \frac{z^3}{3}\right)(\vec{i} + \vec{j}) + \frac{x^2 + y^2}{2}\vec{k}$$

- Notons $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$ une paramétrisation d'un cercle horizontal de rayon 1 et de centre l'origine. On a

$$\vec{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t, 0), \quad \vec{A}(\gamma(t)) = \frac{1}{2}\vec{k} \quad \text{et} \quad \langle \vec{\gamma}'(t), \vec{A}(\gamma(t)) \rangle = 0$$

ainsi $C_\gamma(\vec{A}) = 0$.

- Les orientations de C^+ et Σ^+ sont compatibles.

- Puisque $\vec{U} = \text{rot } \vec{A}$, d'après le théorème de Stokes on a

$$\Phi_\Sigma(\vec{U}) = C_C(\vec{A}) = 0$$

l'égalité à zéro étant due au résultat de la question 3.