Université Claude Bernard Lyon 1

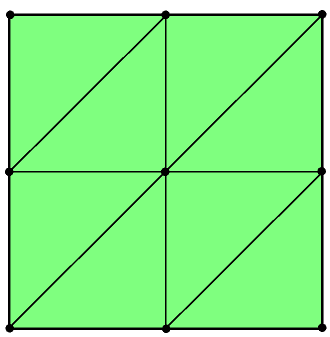
M1G – Topologie Agébrique

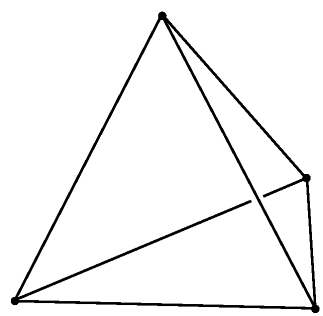
Contrôle partiel - 31 mars 2026 - durée 2h

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Vrai-Faux. – Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse au moyen de brefs arguments et/ou d'un dessin éclairant.

1.– [2pts] Soient X le graphe (=CW complexe de dimension 1) dessiné sur le tore ci-dessous et Y le graphe formé par les sommets et les arêtes d'un tétraèdre. On affirme que X et Y sont homéomorphes.





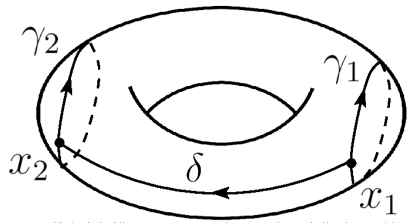
L'espace X (à gauche) dessiné sur un tore et l'espace Y (à droite). Sur la figure de gauche, on prendra garde à l'identification des bords.

2.– [2pts] On considère l'espace $X = \mathbb{S}^1 \cup D$ union du cercle unité $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ et du diamètre $D = [-1, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} r: & X \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & D \subset \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (x, 0). \end{array}$$

On affirme que r est une rétraction par déformation de X sur D.

3.– [2pts] On considère deux points x_1 et x_2 sur le tore, δ un chemin joignant x_1 à x_2 et les lacets γ_1 et γ_2 basés respectivement en x_1 et x_2 représentés ci-dessous. On affirme que γ_1 et $\delta * \gamma_2 * \overline{\delta}$ sont homotopes en tant que lacets basés en x_1.

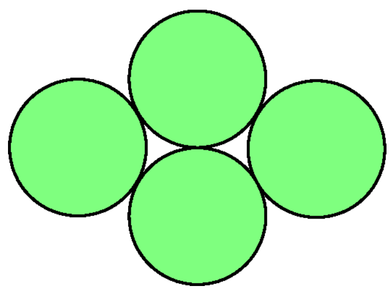


Le lacet γ_1 (à droite), le lacet γ_2 (à gauche) et le chemin δ joignant x_1 à x_2 .

4.– [2pts] On considère l'union X de quatre disques fermés représentée ci-dessous. Soit $x \in X$. Parmi les quatre assertions

$$\begin{array}{llll} (a) & \pi_1(X,x) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, & (b) & \pi_1(X,x) = \mathbb{Z}^2, \\ (c) & \pi_1(X,x) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & (d) & \pi_1(X,x) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}, \end{array}$$

on affirme que d) est valide.



L'espace X, union de quatre disques fermés.

5.– [2pts] On considère l'espace $X = \mathbb{S}^1 \cup_\varphi e^2$ où

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \partial e^2 & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \\ & e^{i\theta} & \longmapsto & \begin{cases} e^{2i\theta} & \text{si } \theta \in [0,\pi] \mod 2\pi \\ e^{-2i\theta} & \text{si } \theta \in [\pi, 2\pi] \mod 2\pi \end{cases} \end{array}$$

Parmi les quatre assertions suivantes, on affirme que b) est valide :

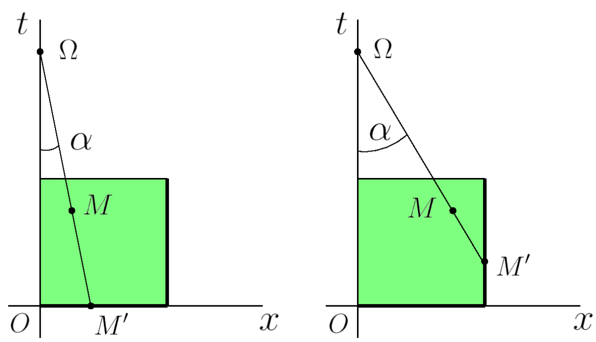
a) Le lacet φ est contractile dans $\mathbb{S}^1$ et X a le type d'homotopie de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$
b) Le lacet φ est contractile dans $\mathbb{S}^1$ et le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$ pour tout $x_0 \in X$.
c) Le lacet φ n'est pas contractile dans $\mathbb{S}^1$ et X a le type d'homotopie de $\mathbb{R}P^2$.
d) Le lacet φ n'est pas contractile dans $\mathbb{S}^1$ et le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ est isomorphe à $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ pour tout $x_0 \in X$.

Problème.– Le but du problème est de découvrir un outil utile pour démontrer que deux espaces ont le même type d'homotopie : la *Propriété d'Extension des Homotopies*, dite aussi *HEP*.

PARTIE 1 : VERS LA HEP.– On considère le carré $C = [0,1]\times[0,1]$ et la partie de son bord $Z_+ = ([0,1]\times\{0\})\cup(\{1\}\times[0,1])$ constituée de l'arête horizontale inférieure et de l'arête verticale droite. On repère un point $M \in C$ par deux coordonnées (x,t) et on définit une application continue

$$\begin{array}{rccl} G_+ : & C & \longrightarrow & Z_+ \\ & (x,t) & \longmapsto & (x',y') = \begin{cases} (2\tan\alpha, 0) & \text{si } 0 \le \tan\alpha \le \frac{1}{2} \\ (1, 2 - \dfrac{1}{\tan\alpha}) & \text{si } \tan\alpha > \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}$$

où $\alpha \ge 0$ est l'angle en le point $\Omega = (0,2)$ entre la droite verticale et la droite (ΩM).



L'application G_+ : le carré C est coloré, l'espace Z_+ est figuré en gras. À gauche, l'image M' d'un point M avec $0 \le \tan\alpha \le \frac{1}{2}$, à droite avec $\tan\alpha > \frac{1}{2}$.

1) a) Soient $F_1, F_2 \in C^0(C,C)$ deux applications continues du carré $C \subset \mathbb{R}^2$ dans lui même. Pour quelle raison

$$(1-s)F_1 + sF_2$$

est-elle une homotopie joignant F_1 à F_2 ?

b) Montrer que G_+ est une rétraction par déformation forte de C sur Z_+.

c) Montrer que C et Z_+ ont le même type d'homotopie.

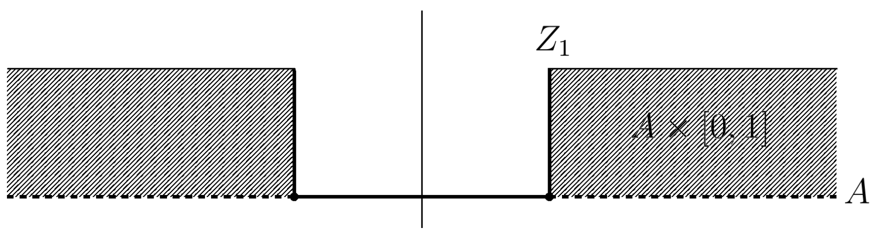
2) a) On considère le rectangle $R_1 = [-1,1]\times[0,1]$ et la partie de son bord définie par

$$Z_1 = (\{-1\}\times[0,1]) \cup ([-1,1]\times\{0\}) \cup (\{1\}\times[0,1])\,.$$

Faire un dessin de R_1 et de Z_1.

b) Construire une rétraction par déformation forte G_1 de R_1 sur Z_1.

3) Soient $A =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et $X = \mathbb{R}$. Soit Y un espace topologique quelconque. On se donne une application continue $f : X \to Y$ ainsi qu'une homotopie $h : A \times [0,1] \to Y$ t.q. $f(x) = h(x,0)$ pour tout $x \in A$. Laquelle des trois applications suivantes prolonge h en une homotopie $H : X \times [0,1] \to Y$ telle que $H(x,0) = f(x)$ pour tout $x \in X$ et $H(x,t) = h(x,t)$ pour tout $(x,t) \in A \times [0,1]$? Justifier.



L'espace A est en trait discontinu, Z_1 en trait gras et X est l'axe des abscisses. L'application H est définie sur $X \cup (A \times [0,1])$ et on veut l'étendre continûment à l'espace $X \times [0,1]$.

Choix 1

$$H(x,t) = \begin{cases} h(x,t) & \text{si } (x,t) \in A \times [0,1] \\ G_1(x,t) & \text{si } (x,t) \notin A \times [0,1] \end{cases}$$

Choix 2

$$H(x,t) = \begin{cases} h(x,t) & \text{si } (x,t) \in A \times [0,1] \\ f(G_1(x,t)) & \text{si } (x,t) \notin A \times [0,1] \end{cases}$$

Choix 3

$$H(x,t) = \begin{cases} h(x,t) & \text{si } (x,t) \in A \times [0,1] \\ h(G_1(x,t)) & \text{si } (x,t) \notin A \times [0,1] \text{ et } G_1(x,t) \in \{-1,1\} \times [0,1] \\ f(G_1(x,t)) & \text{si } (x,t) \notin A \times [0,1] \text{ et } G_1(x,t) \in [-1,1] \times \{0\} \end{cases}$$

Définition.– Soient $A \subset X$ deux espaces topologiques. Lorsque, quelles que soient les applications $f : X \to Y$ et $h : A \times [0,1] \to Y$ telles que $h(x,0) = f(x)$ pour tout $x \in A$, il existe une application $H : X \times [0,1] \to Y$ qui coïncide avec h sur $A \times [0,1]$ et avec f sur $X \times \{0\}$, on dit que la paire d'espace (X, A) possède la propriété d'extension des homotopies ou HEP.

4) a) La paire $(\mathbb{R},]-\infty, -1] \cup [1, \infty[)$ possède-t-elle la HEP ?

b) Soit $X = \mathbb{S}^1 \cup D$ l'union du cercle unité $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ et du diamètre

$D = [-1,1] \times \{0\}$. La paire $(X, \mathbb{S}^1)$ possède-t-elle la HEP ?

c) Soit $X = \mathbb{S}^2 \cup D$ l'union de la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ et du diamètre $D = [-1,1] \times \{(0,0)\}$. La paire $(X, \mathbb{S}^2)$ possède-t-elle la HEP ?

d) Soit $X = |K|$ la réalisation géométrique d'un complexe simplicial de dimension 1 et A la réalisation géométrique de ce même complexe auquel on a ôté une arête. La paire (X, A) possède-t-elle la HEP ?

e) Même question que la d) mais on enlève cette fois un nombre fini d'arêtes

Partie 2 : Une application de la HEP.– On suppose désormais que (X, A), $A \subset X$, est une paire d'espaces topologiques qui possède la propriété d'extension des homotopies. On suppose en outre que A est contractible. Le but de cette partie est de montrer qu'alors X et X/A sont homotopiquement équivalents.

5) a) Montrer qu'il existe $a \in A$ et une application continue $h : A \times [0,1] \to X$ telle que $h(x,0) = x$ et $h(x,1) = a$ pour tout $x \in A$.

b) Montrer en appliquant la HEP qu'il existe une application continue $H : X \times [0,1] \to X$ telle que

$$\forall x \in X, \quad H(x,0) = x \quad \text{et} \quad \forall (x,t) \in A \times [0,1], \quad H(x,t) = h(x,t).$$

c) Soit $p : X \to X/A$ l'application quotient. Pour tout $t \in [0,1]$, on note $H_t : X \to X$ l'application donnée par $H_t(x) = H(x,t)$. Montrer que H_1 passe au quotient en une application continue que l'on notera $g : X/A \to X$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "H_1"] \arrow[d, "p"'] & X \\ X/A \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

d) Montrer que $g \circ p$ est homotope à id_X.

e) À votre avis, l'application H_t, $t \neq 1$, passe-t-elle au quotient en une application $g_t : X/A \to X$?

6) a) Montrer que l'application $p \circ H_t : X \to X/A$ passe au quotient en une application continue que l'on notera $\overline{H}_t : X/A \to X/A$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "H_t"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "p \circ H_t"] & X \arrow[d, "p"] \\ X/A \arrow[r, "\overline{H}_t"] & X/A \end{tikzcd}$$

b) Montrer que $\overline{H}_1$ est homotope à $id_{X/A}$.

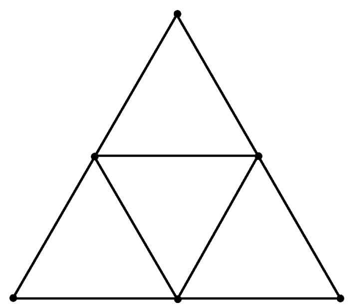
c) Montrer que $\overline{H}_1 \circ p = p \circ g \circ p$.

d) Montrer que si $q : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une surjection et si f_1 et f_2 sont deux applications de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{C}$, alors : $f_1 \circ q = f_2 \circ q \quad \Longrightarrow \quad f_1 = f_2$.

e) Montrer que $\overline{H}_1 = p \circ g$ et en déduire que $p \circ g$ est homotope à $id_{X/A}$.

f) Montrer que X et X/A sont homotopiquement équivalents.

7) Montrer que l'espace X décrit sur l'illustration ci-dessous a le type d'homotopie d'un bouquet de n cercles. On donnera la valeur de n. On précisera également l'espace A utilisé dans le raisonnement.



L'espace X est la réalisation géométrique d'un complexe simplicial de dimension 1 ayant 6 sommets et 9 arêtes.