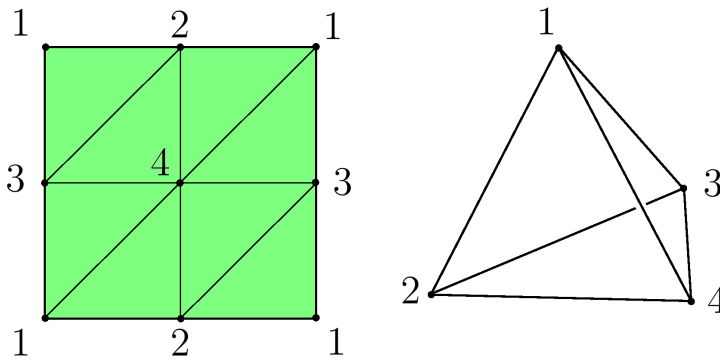


Université Claude Bernard Lyon 1
M1G – Topologie Algébrique
 Corrigé du contrôle partiel du 31 mars 2026 - durée 2h

Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Vrai-Faux. – Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse au moyen de brefs arguments et/ou d'un dessin éclairant.

1.– [2pts] Soient X le graphe (=CW complexe de dimension 1) dessiné sur le tore ci-dessous et Y le graphe formé par les sommets et les arêtes d'un tétraèdre. On affirme que X et Y sont homéomorphes.



L'espace X (à gauche) dessiné sur un tore et l'espace Y (à droite). Sur la figure de gauche, on prendra garde à l'identification des bords.

Rép.– FAUX. Le graphe X possède bien 4 sommets comme Y . En revanche, chaque sommet de X est de valence 6 (i. e. 6 arêtes en émergent) alors que les sommets de Y sont de valence 3.

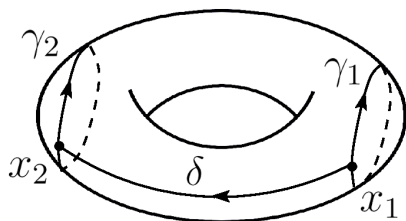
2.– [2pts] On considère l'espace $X = \mathbb{S}^1 \cup D$ union du cercle unité $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ et du diamètre $D = [-1, 1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. On considère l'application

$$r : X \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow D \subset \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (x, 0).$$

On affirme que r est une rétraction par déformation de X sur D .

Rép.— FAUX. Si r était une rétraction par déformation, alors X et A seraient homotopiquement équivalents. Or D possède le type d'homotopie du point et X celui du bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$.

3.— [2pts] On considère deux points x_1 et x_2 sur le tore, δ un chemin joignant x_1 à x_2 et les lacets γ_1 et γ_2 basés respectivement en x_1 et x_2 représentés ci-dessous. On affirme que γ_1 et $\delta * \gamma_2 * \bar{\delta}$ sont homotopes en tant que lacets basés en x_1 .



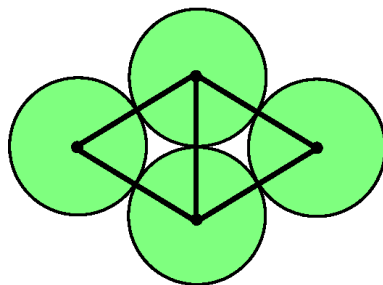
Le lacet γ_1 (à droite), le lacet γ_2 (à gauche) et le chemin δ joignant x_1 à x_2 .

Rép.— VRAIE. En effet, γ_2 est homotope au lacet constant c_{x_2} en x_2 (homotopie de lacets basés en x_2). Ainsi $\delta * \gamma_2 * \bar{\delta}$ est homotope à $\delta * c_{x_2} * \bar{\delta}$ (homotopie de lacets basés en x_1). Ensuite $\delta * c_{x_2} * \bar{\delta}$ est évidemment homotope à c_{x_1} (homotopie de lacets basés en x_1). Puisque γ_1 est lui-même homotope au lacet constant en x_1 . La conclusion s'en déduit.

4.— [2pts] On considère l'union X de quatre disques fermés représentée ci-dessous. Soit $x \in X$. Parmi les quatre assertions

- (a) $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, (b) $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z}^2$,
(c) $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, (d) $\pi_1(X, x) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$,

on affirme que $d)$ est valide.



L'espace X , union de quatre disques fermés et le graphe \mathcal{G} obtenu en joignant les centres des disques ayant un point de contact en commun

Rép.— VRAIE. L'espace X se rétracte par déformation forte sur le graphe \mathcal{G} figuré sur l'illustration. Considérons un arbre couvrant \mathcal{T} de \mathcal{G} . Celui-ci possède 4 arêtes donc \mathcal{G}/\mathcal{T} est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, son groupe fondamental est donc $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

5.— [2pts] On considère l'espace $X = \mathbb{S}^1 \cup_{\varphi} e^2$ où

$$\begin{aligned} \varphi : \partial e^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ e^{i\theta} &\longmapsto \begin{cases} e^{2i\theta} & \text{si } \theta \in [0, \pi] \pmod{2\pi} \\ e^{-2i\theta} & \text{si } \theta \in [\pi, 2\pi] \pmod{2\pi} \end{cases} \end{aligned}$$

Parmi les quatre assertions suivantes, on affirme que b) est valide :

- Le lacet φ est contractile dans \mathbb{S}^1 et X a le type d'homotopie de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$
- Le lacet φ est contractile dans \mathbb{S}^1 et le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ est isomorphe à \mathbb{Z} pour tout $x_0 \in X$.
- Le lacet φ n'est pas contractile dans \mathbb{S}^1 et X a le type d'homotopie de $\mathbb{R}P^2$.
- Le lacet φ n'est pas contractile dans \mathbb{S}^1 et le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ est isomorphe à $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ pour tout $x_0 \in X$.

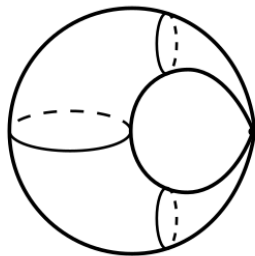
Rép.— VRAIE. En effet, soit $\omega : [0, 1] \rightarrow \partial e^2$ donné par $\omega(s) = e^{2i\pi s}$. Le lacet $\varphi_{\omega} = \varphi \circ \omega$ est contractile via l'homotopie

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (s, t) &\longmapsto \begin{cases} e^{4i\pi s} & \text{si } s \in [0, t/2] \\ e^{4i\pi t} & \text{si } s \in [t/2, 1 - t/2] \\ e^{-4i\pi s} & \text{si } s \in [1 - t/2, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

D'après le théorème de l'attachement d'une n -cellule (TA6), on a

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) / N([\delta_{\gamma}])$$

avec $\delta_{\gamma} = \bar{\gamma} * \varphi_{\omega} * \gamma$ où γ est n'importe quel chemin joignant $\varphi(1)$ à x_0 . Puisque φ_{ω} est contractile, le groupe $N([\delta_{\gamma}])$ est trivial. Ainsi $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) = \mathbb{Z}$. Pour information, l'espace X est homéomorphe à l'espace représenté ci-dessous

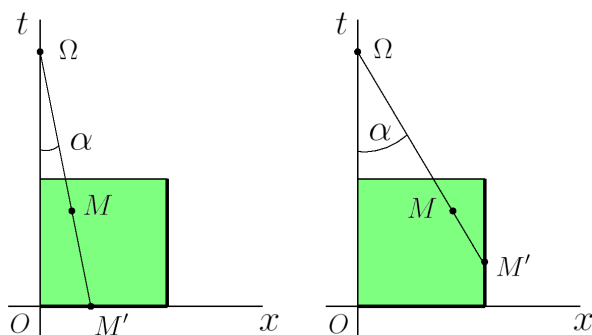


Problème.— Le but du problème est de découvrir un outil utile pour démontrer que deux espaces ont le même type d'homotopie : la *Propriété d'Extension des Homotopies*, dite aussi *HEP*.

PARTIE 1 : VERS LA HEP. – On considère le carré $C = [0, 1] \times [0, 1]$ et la partie de son bord $Z_+ = ([0, 1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0, 1])$ constituée de l'arête horizontale inférieure et de l'arête verticale droite. On repère un point $M \in C$ par deux coordonnées (x, t) et on définit une application continue

$$G_+ : C \longrightarrow Z_+ \\ (x, t) \longmapsto (x', y') = \begin{cases} (2 \tan \alpha, 0) & \text{si } 0 \leq \tan \alpha \leq \frac{1}{2} \\ (1, 2 - \frac{1}{\tan \alpha}) & \text{si } \tan \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}$$

où $\alpha \geq 0$ est l'angle en le point $\Omega = (0, 2)$ entre la droite verticale et la droite (ΩM) .



L'application G_+ : le carré C est coloré, l'espace Z_+ est figuré en gras. À gauche, l'image M' d'un point M avec $0 \leq \tan \alpha \leq \frac{1}{2}$, à droite avec $\tan \alpha > \frac{1}{2}$.

1) a) Soient $F_1, F_2 \in C^0(C, C)$ deux applications continues du carré $C \subset \mathbb{R}^2$ dans lui même. Pour quelle raison

$$(1 - s)F_1 + sF_2$$

est-elle une homotopie joignant F_1 à F_2 ?

b) Montrer que G_+ est une rétraction par déformation forte de C sur Z_+ .

c) Montrer que C et Z_+ ont le même type d'homotopie.

Rép.– a) La raison est que le carré est convexe, donc pour tout $M \in C$ la combinaison

$$(1 - s)F_1(M) + sF_2(M)$$

génère un point de C (cf. CM-TA2)

b) D'après a), $(1 - s)id_C + sG_+$ est une homotopie joignant id_C à G_+ . Cette homotopie fixe les points de Z_+ . Ainsi G_+ est une déformation forte de C sur Z_+ .

c) Puisque G_+ est une déformation forte de C sur Z_+ , ces deux espaces sont homotopiquement équivalents (cf. CM-TA2).

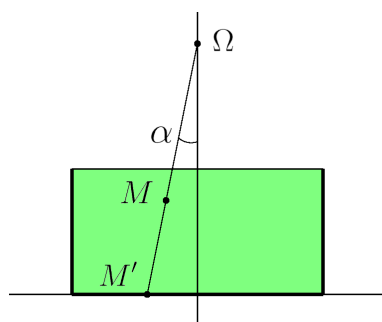
2) a) On considère le rectangle $R_1 = [-1, 1] \times [0, 1]$ et la partie de son bord définie par

$$Z_1 = (\{-1\} \times [0, 1]) \cup ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{1\} \times [0, 1]).$$

Faire un dessin de R_1 et de Z_1 .

b) Construire une rétraction par déformation forte G_1 de R_1 sur Z_1 .

Rép.– a)



Les espaces R_1 et Z_1 .

b) Soit s la réflexion par rapport à l'axe des ordonnées. On définit une application $G_1 : R_1 \rightarrow Z_1$ de la façon suivante

$$G_1(x, t) = \begin{cases} G_+(x, t) & \text{si } (x, t) \in C \\ s \circ G_+ \circ s(x, t) & \text{si } (x, t) \notin C \end{cases}$$

Les questions précédentes montrent avec de simples arguments de symétrie, que G_1 est une déformation forte de R_1 sur Z_1 . En particulier, ces deux espaces sont homotopiquement équivalents.

3) Soient $A =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ et $X = \mathbb{R}$. Soit Y un espace topologique quelconque. On se donne une application continue $f : X \rightarrow Y$ ainsi qu'une homotopie $h : A \times [0, 1] \rightarrow Y$ t.q. $f(x) = h(x, 0)$ pour tout $x \in A$. Laquelle des trois applications suivantes prolonge h en une homotopie $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ telle que $H(x, 0) = f(x)$ pour tout $x \in X$ et $H(x, t) = h(x, t)$ pour tout $(x, t) \in A \times [0, 1]$? Justifier.



L'espace A est en trait discontinu, Z_1 en trait gras et X est l'axe des abscisses. L'application H est définie sur $X \cup (A \times [0, 1])$ et on veut l'étendre continûment à l'espace $X \times [0, 1]$.

Choix 1

$$H(x, t) = \begin{cases} h(x, t) & \text{si } (x, t) \in A \times [0, 1] \\ G_1(x, t) & \text{si } (x, t) \notin A \times [0, 1] \end{cases}$$

Choix 2

$$H(x, t) = \begin{cases} h(x, t) & \text{si } (x, t) \in A \times [0, 1] \\ f(G_1(x, t)) & \text{si } (x, t) \notin A \times [0, 1] \end{cases}$$

Choix 3

$$H(x, t) = \begin{cases} h(x, t) & \text{si } (x, t) \in A \times [0, 1] \\ h(G_1(x, t)) & \text{si } (x, t) \notin A \times [0, 1] \text{ et } G_1(x, t) \in \{-1, 1\} \times [0, 1] \\ f(G_1(x, t)) & \text{si } (x, t) \notin A \times [0, 1] \text{ et } G_1(x, t) \in [-1, 1] \times \{0\} \end{cases}$$

Rép.— Ce ne peut être le choix 1 car l'image de H est dans Y alors que l'image de G_1 est $Z_1 \subset \mathbb{R}^2 \neq Y$ en général.

Ce ne peut être le choix 2 car G_1 est surjective sur Z_1 , f est définie sur X et $Z_1 \not\subset X$. Donc l'expression $f(G_1(x, t))$ n'a pas de sens dans le complémentaire de $Z_1 \cap X$.

Par élimination, ce ne peut donc être que le choix 3. Lorsque $(x, t) \notin A \times [0, 1]$, il faut distinguer les deux cas selon que l'image $G_1(x, t)$ appartient aux segments verticaux de Z_1 et alors h doit s'appliquer, ou au contraire, lorsque $G_1(x, t)$ appartient à X et c'est alors f qui doit s'appliquer.

Définition.— Soient $A \subset X$ deux espaces topologiques. Lorsque, quelles que soient les applications $f : X \rightarrow Y$ et $h : A \times [0, 1] \rightarrow Y$ telles que $h(x, 0) = f(x)$ pour tout $x \in A$, il existe une application $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ qui coïncide avec h sur $A \times [0, 1]$ et avec f sur $X \times \{0\}$, on dit que la paire d'espace (X, A) possède la propriété d'extension des homotopies ou HEP.

4) a) La paire $(\mathbb{R},] - \infty, -1] \cup [1, \infty[)$ possède-t-elle la HEP ?

b) Soit $X = \mathbb{S}^1 \cup D$ l'union du cercle unité $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ et du diamètre $D = [-1, 1] \times \{0\}$. La paire (X, \mathbb{S}^1) possède-t-elle la HEP ?

c) Soit $X = \mathbb{S}^2 \cup D$ l'union de la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ et du diamètre $D = [-1, 1] \times \{(0, 0)\}$. La paire (X, \mathbb{S}^2) possède-t-elle la HEP ?

d) Soit $X = |K|$ la réalisation géométrique d'un complexe simplicial de dimension 1 et A la réalisation géométrique de ce même complexe auquel on a ôté une arête. La paire (X, A) possède-t-elle la HEP ?

e) Même question que la d) mais on enlève cette fois un nombre fini d'arêtes

Rép.– a) La réponse est oui, c'est que qui a été démontré à la question précédente.
b) c) et d) La réponse est toujours oui. Il suffit, dans le raisonnement de la question 3, de remplacer A par un cercle, une sphère ou la réalisation d'un complexe simplicial de dimension 1.

e) Par récurrence, le fait d'enlever un nombre fini d'arêtes ne dépossède pas la paire (X, A) de la HEP.

PARTIE 2 : UNE APPLICATION DE LA HEP.– On suppose désormais que (X, A) , $A \subset X$, est une paire d'espaces topologiques qui possède la propriété d'extension des homotopies. On suppose en outre que A est contractible. Le but de cette partie est de montrer qu'alors X et X/A sont homotopiquement équivalents.

5) a) Montrer qu'il existe $a \in A$ et une application continue $h : A \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que $h(x, 0) = x$ et $h(x, 1) = a$ pour tout $x \in A$.

b) Montrer en appliquant la HEP qu'il existe une application continue $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que

$$\forall x \in X, \quad H(x, 0) = x \quad \text{et} \quad \forall (x, t) \in A \times [0, 1], \quad H(x, t) = h(x, t).$$

c) Soit $p : X \rightarrow X/A$ l'application quotient. Pour tout $t \in [0, 1]$, on note $H_t : X \rightarrow X$ l'application donnée par $H_t(x) = H(x, t)$. Montrer que H_1 passe au quotient en une application continue que l'on notera $g : X/A \rightarrow X$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{H_1} & X \\ p \downarrow & \nearrow g & \\ X/A & & \end{array}$$

d) Montrer que $g \circ p$ est homotope à id_X .

e) À votre avis, l'application H_t , $t \neq 1$, passe-t-elle au quotient en une application $g_t : X/A \rightarrow X$?

Rép.– a) Puisque A est contractile, d'après le cours TA2, il existe un point $a \in A$ tel que l'application constante $A \ni x \mapsto a \in A$ soit homotope à id_A . Ceci signifie qu'il existe une application continue $h : A \times [0, 1] \rightarrow A$ telle que $h(x, 0) = x$ et $h(x, 1) = a$ pour tout $x \in A$. Puisque $A \subset X$, on peut indifféremment voir h comme une application à valeur dans A ou dans X .

b) Soit $f : X \rightarrow X$ l'application identité. On a $h(x, 0) = f(x)$ pour tout $x \in A$.

Puisque (X, A) possède la HEP, il existe $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que

$$\forall (x, t) \in A \times [0, 1], \quad H(x, t) = h(x, t) \quad \text{et} \quad \forall x \in X, \quad H(x, 0) = f(x)$$

Ceci entraîne que

$$\forall x \in A \times [0, 1], \quad H(x, 1) = a \quad \text{et} \quad \forall x \in X, \quad H(x, 0) = x$$

car $f = id_X$.

c) Puisque $H_1 : X \rightarrow X$ est continue et que $H_1(A) = h(A, 1) = a$, on a donc

$$\forall a_1, a_2 \in A, \quad H_1(a_1) = H_1(a_2).$$

La proposition de transfert de continuité au quotient s'applique. L'application quotient $g : X/A \rightarrow X$ est bien définie et continue.

d) En effet $g \circ p = H_1 \sim H_0 = id_X$.

e) En général non. Dès qu'il existe $t \neq 1$ et a_1, a_2 deux points de A tels que $h(a_1, t) \neq h(a_2, t)$ alors H_t ne passe pas au quotient. En effet, dans ce cas $H_t(a_1) \neq H_t(a_2)$ alors que a_1 et a_2 appartiennent à la même classe.

6) a) Montrer que l'application $p \circ H_t : X \rightarrow X/A$ passe au quotient en une application continue que l'on notera $\overline{H}_t : X/A \rightarrow X/A$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{H_t} & X \\ p \downarrow & \searrow p \circ H_t & \downarrow p \\ X/A & \xrightarrow{\overline{H}_t} & X/A \end{array}$$

b) Montrer que \overline{H}_1 est homotope à $id_{X/A}$.

c) Montrer que $\overline{H}_1 \circ p = p \circ g \circ p$.

d) Montrer que si $q : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ est une surjection et si f_1 et f_2 sont deux applications de \mathcal{B} dans \mathcal{C} , alors : $f_1 \circ q = f_2 \circ q \implies f_1 = f_2$.

e) Montrer que $\overline{H}_1 = p \circ g$ et en déduire que $p \circ g$ est homotope à $id_{X/A}$.

f) Montrer que X et X/A sont homotopiquement équivalents.

Rép.— a) Soit $[A] = p(A)$. Puisque pour tout $x \in A$, on a $H_t(x) = h(x, t) \in A$ cela signifie que $H_t(A) \subset A$ et donc

$$p \circ H_t(A) \subset p(A) = [A]$$

Ceci montre que l'application $p \circ H_t$ passe au quotient. Puisque $p \circ H_t$ est continue, d'après la proposition de transfert de continuité au quotient, l'application quotient \overline{H}_t est continue.

b) L'application \overline{H}_1 est homotope à \overline{H}_0 . Or $\overline{H}_0 = id_{X/A}$ car pour tout $x \in X/A$, on a :

$$\overline{H}_0(x) = p \circ H_0(p^{-1}(x)) = p(p^{-1}(x)) = x$$

(dans cette écriture, $p^{-1}(x)$ est un ensemble, on a également utilisé le fait que $H_0 = id_X$)

c) Puisque $\overline{H}_1 : X/A \rightarrow X/A$ est l'application quotient de $p \circ H_1 : X \rightarrow X/A$, on a nécessairement $\overline{H}_1 \circ p = p \circ H_1$ et d'après la question 5c, $H_1 = g \circ p$, on en déduit

$$\overline{H}_1 \circ p = p \circ H_1 = p \circ g \circ p.$$

d) Supposons qu'il existe $b \in \mathcal{B}$ tel que $f_1(b) \neq f_2(b)$. Puisque q est une surjection, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $b = q(a)$ et donc $f_1 \circ q(a) \neq f_2 \circ q(a)$. Contradiction.

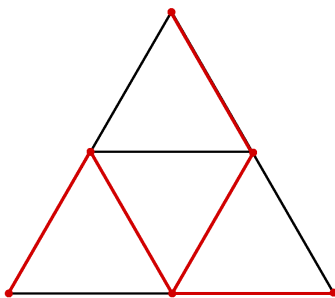
e) D'après la question précédente, on a donc

$$\overline{H}_1 \circ p = (p \circ g) \circ p \implies \overline{H}_1 = p \circ g$$

et d'après la question b) on a $\overline{H}_1 \sim id_{X/A}$.

f) Les questions 5d et 6d montrent que $g : X/A \rightarrow X$ et $p : X \rightarrow X/A$ sont des inverses homotopiques l'un de l'autre. Les espaces X et X/A sont donc homotopiquement équivalents.

7) Montrer que l'espace X décrit sur l'illustration ci-dessous a le type d'homotopie d'un bouquet de n cercles. On donnera la valeur de n . On précisera également l'espace A utilisé dans le raisonnement.



En rouge : un exemple d'arbre couvrant sur X .

Rép.— On choisit comme espace A un arbre couvrant sur X . Puisque A est obtenue à partir de X par extraction de trois arêtes, d'après la question 4, la paire (X, A) possède la HEP. Puisque l'espace A est un arbre, il est contractile et on peut utiliser le résultat de la question 7 : X et X/A sont homotopiquement équivalents. Or X/A est une union pointée de quatre cercles. Ainsi X est homotopiquement équivalent à un bouquet de quatre cercles.