Université Claude Bernard Lyon 1

M1G – Topologie Agébrique

Corrigé du contrôle terminal du 29 mai 2024 - durée 2h

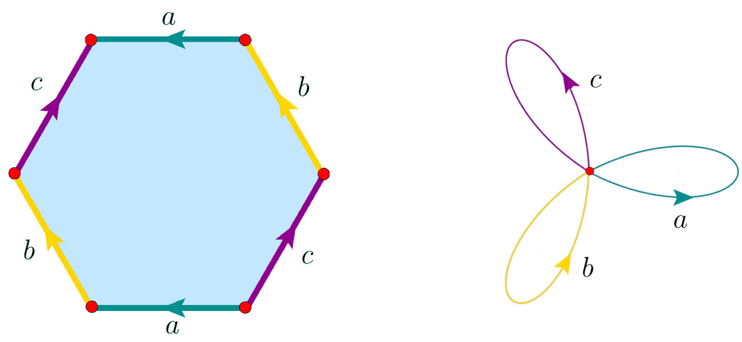
Les documents sont autorisés mais les calculettes et les portables sont interdits. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction pour l'attribution d'une note.

Vrai-Faux. – Pour chacune des assertions suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse. Justifier votre réponse au moyen de brefs arguments et/ou d'un dessin éclairant.

1.– **[2pts]** On considère le CW-complexe X composé d'un point, de trois 1-cellules et d'une 2-cellule :

$$X^0 = \{x_0\}, \quad X^1 = \vee_{i=1}^3 \mathbb{S}^1_i \quad \text{et} \quad X^2 = X$$

et où l'application d'attachement $\varphi : \partial e_2 \longrightarrow X^1$ se déduit de la figure ci-dessous :



La 2-cellule e_2 est un hexagone, les six sommets sont envoyés sur x_0 par φ.

Le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ est celui donné en (a) :

$$(a) \;\; < a, b, c \,|\, abc = cba > \qquad (b) \;\; < a, b, c \,|\, (abc)^2 = 1 > \qquad (c) \;\; < a, b, c \,|\, abc^2ba = 1 >$$

Rép.– VRAI. On a

$$\pi_1(\vee_{i=1}^3 \mathbb{S}^1_i, x_0) =< a, b, c >$$

et d'après le dessin, la classe de $\varphi_\omega = \varphi \circ \omega$ dans $\pi_1(\vee_{i=1}^3 \mathbb{S}^1_i, x_0)$ est $[\varphi_\omega] = abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$. D'après le cours (TA6), on a

$$\pi_1(X, x_0) = \pi_1(X^1, x_0)/N$$

où N est le sous-groupe normal engendré par $[\varphi_\omega]$. Ainsi

$$\pi_1(X, x_0) =< a, b, c \,|\, abca^{-1}b^{-1}c^{-1} = 1 >$$

soit encore

$$\pi_1(X, x_0) =< a, b, c \,|\, abc = cba > .$$

2.– **[2pts]** Le bouquet de deux cercles est l'espace total d'un revêtement à deux feuillets du cercle. Précisément, l'application

$$p : \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

qui est l'identité sur chacun des deux facteurs, est un revêtement.

Rép.– FAUX. Un voisinage suffisamment petit du point d'attachement des deux cercles est homéomorphe à un bouquet de quatre segments. Or, aucun point de la base n'a un voisinage de ce type.

3.– [2pts] Soit $p : (E, x) \to (B, b)$ un revêtement dont la base est simplement connexe. Alors $\pi_1(E, x)$ est trivial.

Rép.– VRAI. D'après le théorème d'injectivité (TA8), le morphisme

$$p_* : \pi(E, x) \longrightarrow \pi_1(B, b)$$

est injectif. Puisque $\pi_1(B, b)$ est trivial, il faut que $\pi(E, x)$ soit trivial.

4.– [2pts] Soit $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}P^2$ le revêtement a deux feuillets obtenu comme l'application quotient de l'action de $\mathbb{Z}_2$ sur la sphère par antipodie. L'application identité $id : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ se relève en une application $\widetilde{id} : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{S}^2$.

Rép.– Faux. Soit $x \in \mathbb{S}^2$ et $b = p(x)$. L'application id se relève ssi

$$id_*(\pi_1(\mathbb{R}P^2, b)) \subset p_*(\pi_1(\mathbb{S}^2, x)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{Z}_2 \subset \{1\}.$$

Ceci montre qu'elle ne se relève pas.

5.– [2pts] On considère le revêtement $p : E \to \mathbb{S}^1_a \vee \mathbb{S}^1_b$ à trois feuillets illustré ci-dessous. La réflexion r par rapport à l'axe contenant les trois sommets de E est un automorphisme de revêtement.

Rép.– FAUX. Le diagramme ci-dessous ne commute pas.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Soit E_g le sous graphe de E constitué des trois sommets et des arêtes à gauche de l'axe de réflexion et soit $E_d = r(E_g)$. On a $E = E_g \cup E_d$ et $p(E_g) = \mathbb{S}^1_a$, $p(E_d) = \mathbb{S}^1_b$. Mais $p \circ r(E_g) = \mathbb{S}^1_b$ et $p \circ r(E_d) = \mathbb{S}^1_a$.

Problème.– La bouteille de Klein

Revêtement double de la bouteille de Klein
(Image extraite du *Topologicon* de Jean-Pierre Petit).

Partie 1 : Le tore standard de $\mathbb{C}^2$.– Soit $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ le cercle unité. Le *tore standard* de $\mathbb{C}^2$ est l'espace produit $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Il est naturellement paramétré par

$$\begin{array}{rccl} \tilde{f}: & [0,1] \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ & (x,y) & \longmapsto & (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y}). \end{array}$$

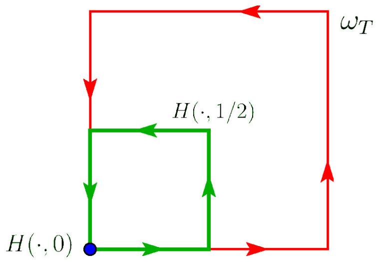
Cette paramétrisation est continue, surjective sa restriction à $]0,1[\times]0,1[$ est injective.

1) On considère le lacet $\omega_T : [0,1] \to [0,1]^2$ basé en $(0,0)$ et défini par

$$\omega_T(s) := \begin{cases} (4s, 0) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{4}] \\ (1, 4s-1) & \text{si } s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ (3-4s, 1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (0, 4-4s) & \text{si } s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

et l'homotopie $H : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]^2$ donnée par $H(s,t) := t\omega_T(s)$. Faire figurer sur même dessin *soigné* l'image de ω_T puis celles de $s \mapsto H(s, 1/2)$ et $s \mapsto H(s,0)$.

Rép.– 1)



2) Soient $e = (1,1) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ et $\alpha_T, \beta_T : [0,1] \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ les lacets de T basés en e et donnés par

$$\alpha_T(s) := (e^{2i\pi s}, 1) \quad \text{et} \quad \beta_T(s) := (1, e^{2i\pi s}).$$

Montrer que $\alpha_T * \beta_T * \bar{\alpha}_T * \bar{\beta}_T$ est homotope au lacet constant c_e.

Rép.– 2) Ici, il faut remarquer que

$$\tilde{f} \circ \omega_T = \alpha_T * \beta_T * \bar{\alpha}_T * \bar{\beta}_T.$$

Le lacet ω_T est homotope à $c_{(0,0)}$ par l'homotopie $H(\cdot, t)$ qui respecte le point base $(0,0)$. Puisque $e = \tilde{f}(0,0)$, l'homotopie $\tilde{f} \circ H(\cdot, t)$ joint c_e à $\alpha_T * \beta_T * \bar{\alpha}_T * \bar{\beta}_T$ et respecte le point base e.

3) On considère la structure de CW-complexe de T composée d'un point, de deux 1-cellules et d'une 2-cellule $e_2 = [0,1]^2$ et donnée par

$$T^0 = \{e\}, T^1 = \left(\mathbb{S}^1 \times \{1\}\right) \cup \left(\{1\} \times \mathbb{S}^1\right), T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$

et où l'application d'attachement

$$\varphi_T : \partial([0,1]^2) \longrightarrow T^1$$

est la restriction de $\tilde{f}$ à $\partial([0,1]^2)$.
i) Montrer que $\alpha_T * \beta_T * \bar{\alpha}_T * \bar{\beta}_T$ se factorise à travers φ_T.
ii) En déduire qu'une présentation du groupe fondamental de T est

$$\pi_1(T, e) = \langle a_T, b_T | a_T b_T a_T^{-1} b_T^{-1} = 1 \rangle$$

avec $a_T = [\alpha_T]$ et $b_T = [\beta_T]$.

Rép.– 3i) D'après la question 2 :
$$\alpha_T * \beta_T * \bar{\alpha}_T * \bar{\beta}_T = \varphi_T \circ \omega_T.$$
ii) D'après le cours (TA6), puisque
$$T = T^1 \cup_{\varphi_T} [0,1]^2 \quad \text{où} \quad \varphi_T : \partial([0,1]^2) \to T^1$$
on a
$$\pi_1(T, e) = \pi_1(T^1, e)/N([\varphi_T \circ \omega_T])$$
Or $\pi_1(T^1, e) =< a_T, b_T >$ et $[\varphi_T \circ \omega_T] = a_T b_T a_T^{-1} b_T^{-1}$ d'après la question précédente. Ainsi
$$\pi_1(T, e) = \langle a_T, b_T | a_T b_T a_T^{-1} b_T^{-1} = 1 \rangle.$$

Partie 2 : La bouteille de Klein.– On note (z, w) un point de T. Ceci signifie que $(z, w) \in \mathbb{C}^2$ et que $|z| = |w| = 1$. Soit $\mathbb{Z}_2$ le groupe multiplicatif $(\{-1, 1\}, \cdot)$ et soit $\phi : \mathbb{Z}_2 \times T \to T$ l'action donnée par
$$\phi(1, (z, w)) = (z, w) \quad \text{et} \quad \phi(-1, (z, w)) = (-z, \overline{w})$$
L'espace quotient $T/\mathbb{Z}_2$ pour cette action est noté K et appelé la *bouteille de Klein*.

4) i) Montrer que ϕ opère continûment, proprement discontinûment et librement.
ii) Montrer que l'espace quotient $K = T/\mathbb{Z}_2$ est séparé.
iii) Montrer que l'application quotient $p : T \to K$ est un revêtement.
iv) Montrer que le cardinal de la fibre de p est deux.

Rép.– i) L'action est continue car $z \mapsto -z$ et $w \mapsto \bar{w}$ sont des applications continues. Puisque $\mathbb{Z}_2$ est de cardinal fini, ϕ opère proprement discontinûment. Enfin
$$\phi(-1, (z, w)) = (z, w) \iff (-z, \overline{w}) = (z, w) \iff (z = 0 \text{ et } w \in \mathbb{R})$$
Notons que $(z, w) \in T \Rightarrow |z| = 1$. Par conséquent, aucun point $(z, w) \in T$ n'est fixé par -1. L'action est donc libre.
ii) L'espace T étant compact, il est également localement compact. D'après une proposition du cours, le groupe $\mathbb{Z}_2$ étant discret et opérant continûment, proprement discontinûment et librement sur l'espace localement compact T, le quotient $K = T/\mathbb{Z}_2$ est séparé.
iii) D'après le cours, le groupe $\mathbb{Z}_2$ étant discret et opérant continûment, proprement discontinûment et librement sur l'espace localement compact T, l'application quotient
$$p : T \longrightarrow K = K/\mathbb{Z}_2$$
est un revêtement.
iv) L'action étant libre chaque orbite de $\mathbb{Z}_2$ contient deux éléments. Le revêtement est donc à deux feuillets.

5) On note $f = p \circ \tilde{f}$.

$$\begin{tikzcd}
{[0,1] \times [0,1]} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & T \arrow[d, "p"] \\
 & K = T/\mathbb{Z}_2
\end{tikzcd}$$

i) Soit $R = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$ et s la transformation $s(x, y) = (x + \frac{1}{2}, 1 - y)$. Montrer que
$$\forall (x, y) \in R, \qquad f(s(x)) = f(x, y).$$
ii) En déduire que f restreinte à R est surjective.
iii) Soit $Int\, R :=]0, \frac{1}{2}[\times]0, 1[$. On pose
$$U := f(Int\, R), \quad V_1 := \tilde{f}(Int\, R) \quad \text{et} \quad V_2 = \tilde{f}(s(Int\, R)).$$

Montrer que $V_1 \cap V_2 := \emptyset$

iv) Montrer que $p(V_1) = U$ et $p(V_2) = U$.

v) Montrer que $p^{-1}(U) = V_1 \cup V_2$.

vi) Montrer que f restreinte à $Int\, R =]0, \frac{1}{2}[\times]0,1[$ est bijective.

Rép.– i) On a

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x + \frac{1}{2}, 1-y) &= (e^{2i\pi(x+\frac{1}{2})}, e^{2i\pi(1-y)}) \\ &= (-e^{2i\pi x}, \overline{e^{2i\pi y}}).\end{aligned}$$

Puisque $p(z,w) = p(-z, \bar{w})$, on déduit

$$f(x + \frac{1}{2}, 1-y) = f(x,y).$$

ii) Notons d'abord que la surjectivité de $\tilde{f}$ entraîne celle de $f = p \circ \tilde{f}$. L'application s est une symétrie glissée d'axe $\{y = \frac{1}{2}\}$ et vecteur $v = (\frac{1}{2}, 0)$. Elle envoie R sur $R' = s(R) = [\frac{1}{2}, 1] \times [0,1]$. Par conséquent

$$K = f([0,1]^2) = f(R \cup R') = f(R).$$

iii) Puisque

$$Int\, R \cap s(Int\, R) = \emptyset$$

on a $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ car $\tilde{f}$ est injective sur $]0,1[\times]0,1[$ et donc sur $Int\, R \cup s(Int\, R)$.

iv) Puisque $f = p \circ \tilde{f}$ on a

$$p(V_1) = p \circ \tilde{f}(Int\, R) = f(Int\, R) = U$$

et puisque $f \circ s = f$ on a aussi

$$p(V_2) = p \circ \tilde{f}(s(Int\, R)) = f(s(Int\, R)) = f(Int\, R) = U.$$

v) D'après la question précédente

$$V_1 \cup V_2 \subset p^{-1}(U).$$

L'application p étant un revêtement à deux feuillets, la préimage d'un point est un ensemble à deux éléments. Or, tout élément de U a (au moins) une préimage dans V_1 et (au moins) une dans V_2. Donc l'inclusion ci-dessus est en réalité une égalité

$$V_1 \cup V_2 = p^{-1}(U).$$

vi) D'après les questions précédentes, $p_{|V_1} : V_1 \to U$ est inversible ainsi que $\tilde{f}_{|Int\, R} : Int\, R \to V_1 = f(Int\, R)$ (car $\tilde{f}$ est injective sur $]0,1[^2$). Ainsi $f_{|Int\, R} = p_{V_1} \circ \tilde{f}_{|Int\, R}$ est inversible et

$$(f_{|Int\, R})^{-1} = (\tilde{f}_{|Int\, R})^{-1} \circ p_{|V_1}^{-1}.$$

Partie 3 : Le groupe fondamental de la bouteille de Klein.–

6) On considère sur K les deux chemins de T suivants :

$$\delta_1(s) := (e^{i\pi s}, 1) \quad \text{et} \quad \delta_2(s) := (e^{i\pi(s+1)}, 1), \qquad s \in [0,1],$$

et on note $\alpha_K, \beta_K : [0,1] \to K$ les chemins donnés par

$$\alpha_K := p \circ \delta_1 \quad \text{et} \quad \beta_K := p \circ \beta_T.$$

i) Montrer que pour tout s on a $\phi(-1, \delta_1(s)) = \delta_2(s)$. En déduire que $p \circ \delta_1 = p \circ \delta_2$

ii) Montrer que α_K et β_K sont des lacets de K basés en $p(e)$.

iii) Montrer que $\alpha_T = \delta_1 * \delta_2$ et $p_*[\alpha_T] = [\alpha_K]^2$.

iv) Déterminer $p_*[\beta_T]$.

v) Le morphisme $p_* : \pi_1(T, e) \longrightarrow \pi_1(K, p(e))$ est-il injectif ?

vi) Déduire de la réponse à la question v) que α_K et β_K ne sont pas homotopes au chemin constant $c_{p(e)}$.

Rép.– i) On a
$$\phi(-1,\delta_1(s)) = \phi(-1,(e^{i\pi s},1))) = (-e^{i\pi s},\bar{1}) = (e^{i\pi(s+1)},1) = \delta_2(s).$$
Puisque p est l'application quotient de T par l'action de ϕ, on en déduit $p\circ\delta_1 = p\circ\delta_2$.
ii) On a
$$\alpha_K(0) = p(1,1) \quad \text{et} \quad \alpha_K(1) = p(-1,1)$$
Or $(-1,1) = (-1,\bar{1})$ et donc $p(-1,1) = p(1,1)$ ce qui montre que α_K est un lacet. L'application $\beta_K = p\circ\beta_T$ est un lacet puisque β_T en est un.
iii) Notons que $\delta_1(1) = \delta_2(0)$. La relation $\alpha_T = \delta_1 * \delta_2$ se vérifie rapidement. Puis on constate que
$$p\circ\alpha_T = p\circ(\delta_1 * \delta_2) = (p\circ\delta_1)*(p\circ\delta_2) = (p\circ\delta_1)*(p\circ\delta_1)$$
car d'après la question i) $p\circ\delta_2 = p\circ\delta_1$. Puisque $\alpha_K := p\circ\delta_1$, on en déduit
$$p_*[\alpha_T] = [p\circ\alpha_T] = [p\circ\delta_1]^2 = [\alpha_K]^2.$$
iv) On a $p_*[\beta_T] = [p\circ\beta_T]$. Or, par définition $\beta_K := p\circ\beta_T$. Ainsi $p_*[\beta_T] = [\beta_K]$.
v) Le théorème de l'injectivité de p_* (TA8) s'applique ici puisque p est un revêtement. On en déduit ainsi l'injectivité de p_*.
vi) Supposons que α_K soit homotope au chemin constant $c_{p(e)}$. Alors $p_*[\alpha_T] = [\alpha_K] = [c_{p(e)}]$. Or $[\alpha_T] \neq [c_e]$ est un générateur du $\pi_1(T,e)$ d'après 3 ii). On a nécessairement $p_*[c_e] = [c_{p(e)}]$ et puisque p_* est injective, on doit avoir $p_*[\alpha_T] \neq [c_{p(e)}]$. Contradiction. Même raisonnement pour β_K.

7) On considère la structure de CW-complexe de K composée d'un point, de deux 1-cellules et d'une 2-cellule $e_2 = R = [0,\frac{1}{2}]\times[0,1]$ et donnée par
$$K^0 = \{p(e)\}, K^1 = p\left(\mathbb{S}^1\times\{1\}\right)\cup p\left(\{1\}\times\mathbb{S}^1\right), K^2 = p(\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1)$$
et où l'application d'attachement
$$\varphi_K : \partial R \to K$$
est la restriction de f à ∂R.

i) Soient $\gamma_i : [0,1]\to R$, $i\in\{1,2\}$, les chemins définis par
$$\gamma_1(s) := (\frac{s}{2},0) \quad \text{et} \quad \gamma_2(s) := (\frac{1-s}{2},1).$$
Montrer que $\varphi_K\circ\gamma_1 = \alpha_K$ et que $\varphi_K\circ\gamma_2 = \bar{\alpha}_K$.

ii) Soient $\sigma_i : [0,1]\to R$, $i\in\{1,2\}$, les chemins définis par
$$\sigma_1(s) := (0,1-s) \quad \text{et} \quad \sigma_2(s) := (\frac{1}{2},s).$$
Montrer que $\varphi_K\circ\sigma_1 = \varphi_K\circ\sigma_2 = \bar{\beta}_K$.

iii) Décrire un lacet $\omega_K : [0,1]\to\partial R$ tel que
$$\alpha_K * \bar{\beta}_K * \bar{\alpha}_K * \bar{\beta}_K = \varphi_K\circ\omega_K$$

iv) On admet que K^1 est un bouquet de deux cercles dont $[\alpha_K]$ est un générateur du groupe fondamental du premier cercle et $[\beta_K]$ du second cercle. Déduire des questions précédentes qu'une présentation du groupe fondamental de K est
$$\pi_1(K,p(e)) = \langle a,b | aba^{-1}b = 1\rangle$$
avec $a = [\alpha_K]$ et $b = [\bar{\beta}_K]$.

Rép.– i) On a
$$\tilde{f}(\gamma_1(s)) = \tilde{f}(\frac{s}{2},0) = (e^{i\pi s},1) = \delta_1(s)$$

et

$$\tilde{f}(\gamma_2(s)) = \tilde{f}(\frac{1-s}{2}, 1) = (e^{i\pi(1-s)}, 1) = (-e^{i\pi(1-s)}, 1) = \bar{\delta}_2(s)$$

Ainsi

$$\varphi_K \circ \gamma_1 = (p \circ \tilde{f}) \circ \gamma_1 = p \circ (\tilde{f} \circ \gamma_1) = p \circ \delta_1 = \alpha_K.$$

D'après la question 6i) $p \circ \delta_1 = p \circ \delta_2$, ainsi

$$\varphi_K \circ \gamma_2 = (p \circ \tilde{f}) \circ \gamma_2 = p \circ (\tilde{f} \circ \gamma_2) = p \circ \delta_2 = p \circ \delta_1 = \bar{\alpha}_K.$$

ii) On a d'une part

$$\tilde{f}(\sigma_1(s)) = \tilde{f}(0, 1-s) = (1, e^{2i\pi(1-s)}) = \beta_T(1-s) = \bar{\beta}_T(s)$$

d'où

$$\varphi_K \circ \sigma_1 = (p \circ \tilde{f}) \circ \sigma_1 = p \circ (\tilde{f} \circ \sigma_1) = p \circ \bar{\beta}_T = \bar{\beta}_K.$$

D'autre part

$$\tilde{f}(\sigma_2(s)) = \tilde{f}(\frac{1}{2}, s) = (-1, e^{2i\pi s})$$

or

$$\phi(-1, (-1, e^{2i\pi s})) = (1, e^{-2i\pi s}) = (1, e^{2i\pi(1-s)}) = \bar{\beta}_T$$

ainsi

$$\varphi_K \circ \sigma_2 = p \circ \tilde{f} \circ \sigma_2 = \bar{\beta}_K.$$

iii) D'après ce que l'on vient de faire, le lacet $\omega_K = \gamma_1 * \sigma_2 * \gamma_2 * \sigma_1$ convient. En effet,

$$\begin{aligned} \varphi_K \circ \omega_K &= (\varphi_K \circ \gamma_1) * (\varphi_K \circ \sigma_2) * (\varphi_K \circ \gamma_2) * (\varphi_K \circ \sigma_1) \\ &= \alpha_K * \bar{\beta}_K * \bar{\alpha}_K * \bar{\beta}_K \end{aligned}$$

iv) D'après le cours (TA6), puisque

$$K = K^1 \cup_{\varphi_K} R \quad \text{où} \quad \varphi_K : \partial R \to K^1$$

on a

$$\pi_1(K, p(e)) = \pi_1(K^1, p(e))/N([\varphi_K \circ \omega_K])$$

Or $\pi_1(K^1, p(e)) =< a, b >$ et $[\varphi_K \circ \omega_K] = aba^{-1}b$ d'après la question précédente. Ainsi

$$\pi_1(K, p(e)) = \langle a, b | aba^{-1}b = 1 \rangle.$$