H-principe et intégration convexe

Vincent Borrelli

March 15, 2011

1 Qu'est-ce que le h-principe ?

Définition.– Soit $X \longrightarrow M^n$ une fibration. Une *relation différentielle* d'ordre r portant sur les sections $\Gamma^r(X)$ de classe C^r est un sous-ensemble $\mathcal{R}$ de l'espace des jets $X^{(r)}$.

Exemple 1.– Un système d'équations aux dérivées partielles

$$\Phi(x, f, \partial^\alpha f) = 0$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^q$ et où les dérivées partielles portent sur les $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ tels que $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n \leq r$ définit naturellement une relation différentielle $\mathcal{R}$ par

$$\mathcal{R} = \{(x, y, z_\alpha) \mid \Phi(x, y, z_\alpha) = 0\}.$$

Ici X est le fibré trivial $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $X^{(r)} = J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q)$.

Exemple 2.– Soit $X = \Lambda^p T^* M^n \longrightarrow M^n$ La condition de fermeture des p-formes différentielles $\alpha \in \Omega^p(M^n)$

$$d\alpha = 0$$

définit naturellement une relation différentielle $\mathcal{R} \subset X^{(1)}$.

Exemple 3.– Soit $X = M^n \times N^q \longrightarrow M^n$. On dit que $f : M^n \longrightarrow N^q$ est une immersion si, en tout point $p \in M^n$, on a $rg\ df_p = n$. Cette condition définit une relation différentielle

$$\mathcal{R} = Mono(TM, TN) \subset X^{(1)} = Hom(TM, TN).$$

Notation.– Soit $f \in \Gamma^r(X)$ une section de $X \longrightarrow M^n$. On note $J : \Gamma^r(X) \longrightarrow \Gamma^0(X^{(r)})$ l'application qui à $f \in \Gamma^r(X)$ associe son r-jet $j^r f$.

Définition.– Tout élément $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$ est appelé *solution formelle* de $\mathcal{R}$. On dit qu'une solution formelle σ est *holonome* s'il existe $f \in \Gamma^r(X)$ telle que $\sigma = j^r f$. Une telle section f est dite *solution de la relation différentielle* $\mathcal{R}$. On note $\mathcal{S}ol(\mathcal{R})$ l'espace des solutions de $\mathcal{R}$.

Les espaces $\mathcal{S}ol(\mathcal{R})$ et $\Gamma(\mathcal{R})$ sont munis de la topologie des compacts-ouverts, autrement dit, de la topologie de la convergence uniforme des sections (et de leurs dérivées juqu'à l'ordre r pour $\mathcal{S}ol(\mathcal{R})$) sur les compacts de M^n.

Définition.– On dit que $\mathcal{R}$ *satisfait au h-principe* (ou au *principe homotopique*) si l'inclusion naturelle $J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$ est induit une surjection sur les composantes connexes. On dit que une $\mathcal{R}$ *satisfait au h-principe paramétrique* si J est équivalence d'homotopie faible.

Rappelons qu'une application $f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ entre deux espaces topologiques est une *équivalence d'homotopie faible* si elle induit un isomorphisme au niveau de tous les groupes d'homotopie i. e.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \pi_k(f) : \pi_k(X, x) \simeq \pi_k(Y, y).$$

Si $k = 0$, il faut bien sûr comprendre que f induit une bijection entre les π_0. L'application f est une *équivalence d'homotopie* s'il existe

$$g : (Y, y) \longrightarrow (X, x)$$

telle que $f \circ g$ est homotope à Id_Y et $g \circ f$ est homotope à Id_X.

Une remarque tirée de [3].– Une version en dimension infinie du théorème J.H.C. Whitehead (cf. [11] ou [2]) implique que pour les variétés de Fréchet[1] métrisable l'équivalence d'homotopie faible implique l'équivalence d'homotopie. En particulier, les espaces $\mathcal{S}ol(\mathcal{R})$ et $\Gamma(\mathcal{R})$ sont Fréchet métrisables et donc le h-principe pour $\mathcal{R}$ implique que $J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$ est une équivalence d'homotopie.

[1]Rappelons qu'un espace de Fréchet est un e.v.t. réel complet dont la topologie est induite par une famille dénombrable et séparante de semi-normes $|.|_n$. Il est métrisable avec $d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x-y|_n}{1+|x-y|_n}$

2 Exemples de h-principes

On peut trouver un condensé d'exemples divers sur la page de John Francis [5]. Voici mon propre choix, évidemment bien subjectif.

2.1 Le théorème de Whitney

On munit $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0,1]/\partial[0,1]$ d'une orientation. Si $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ est une immersion de classe C^1 alors son application tangente fournit une application continue

$$\gamma' : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

dont on peut calculer le nombre de tours $N(\gamma')$. Rappelons que

$$N(\gamma') := \widetilde{t}(1) - \widetilde{t}(0) \in \mathbb{Z}$$

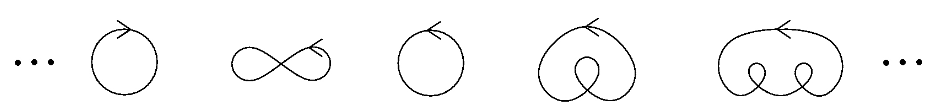
où $\widetilde{t} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est un relevé de

$$t := \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

On définit l'indice $Ind(\gamma)$ de γ comme étant le nombre de tours $N(\gamma')$. Puisque $Ind(\gamma)$ est clairement invariant par homotopie régulière[2], on a une application :

$$\begin{array}{rccc} Ind : & \pi_0(I(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^2)) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & [\gamma] & \longmapsto & Ind(\gamma). \end{array}$$

Cette application est surjective comme le montre l'examen des exemples ci-dessous :



$Ind(\gamma) = -1$ $\quad$ $Ind(\gamma) = 0$ $\quad$ $Ind(\gamma) = 1$ $\quad$ $Ind(\gamma) = 2$ $\quad$ $Ind(\gamma) = 3$

Cette application est en réalité une bijection.

Théorème de Whitney-Graustein (1937). – *On a :* $\pi_0(I(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^2)) \simeq \mathbb{Z}$, *l'identification étant donnée par l'indice.*

[2] J'appelle *homotopie régulière* un chemin continu dans $I(\mathbb{S}^1,\mathbb{R}^2)$.

Ici $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ et $X^{(1)} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Si $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ alors $j^1\gamma(x) = (x, \gamma(x), \gamma'(x))$. et la relation différentielle est l'ensemble

$$\mathcal{R} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Enfin $\Gamma(\mathcal{R}) = C^0(\mathbb{S}^1, \mathcal{R})$ et $Sol(\mathcal{R}) = I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$. Le théorème de Whitney-Graustein affirme que $J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$ induit une bijection au niveau du π_0. En travaillant à peine plus la démonstration de ce théorème, on montre facilement que J est en fait une é. h. f. La relation différentielle des immersions de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^2$ satisfait donc un h-principe paramétrique.

2.2 Théorèmes de Smale et Hirsch

Une immersion entre deux variétés est une application $f : M^n \longrightarrow N^m$ dont la différentiel est de rang n en tout point. L'espace $I(M,N)$ des immersions est muni de la topologie faible C^1.

Théorème de Smale-Hirsch (1958-59). – *Soient M^n et N^q deux variétés lisses, $q > n$. On a : $\pi_0(I(M,N)) \simeq \pi_0(Mono(TM,TN))$ l'identification étant donnée par la différentielle.*

La relation différentielle est celle de l'exemple 3 :

$$\mathcal{R} = Mono(TM,TN) \subset X^{(1)} = Hom(TM,TN)$$

où $Hom(TM,TN)$ l'espace des morphismes de TM dans TN. En particulier, on a la fibration

$$\mathcal{L}(T_xM, T_yN) \longrightarrow Hom(TM,TN) \xrightarrow{p} M \times N.$$

Une version à paramètre de ce théorème montre qu'en fait

$$J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) = I(M,N) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R}) = Mono(TM,TN)$$

est une é. h. f.

Corollaire.– *L'espace $I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$ est connexe.*

2.3 Théorèmes de Nash et Kuiper

Définition.– Une immersion $f : (M^n, g) \longrightarrow (N^q, h)$ entre deux variétés riemanniennes est dite *(strictement) courte* si

$$f^*h < g.$$

Elle est dite *isométrique* si $f^*h = g$. Un *plongement* est une immersion qui réalise un difféomorphisme sur son image.

Théorème (Nash-Kuiper 54-55, Gromov 86). – *Soient (M^n, g) et (N^q, h) deux variétés riemanniennes, $q > n$. Soit $f_0 : (M^n, g) \longrightarrow (N^q, h)$ une immersion strictement courte alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une immersion isométrique C^1 f tel que*

$$\|f - f_0\|_{C^0} \leq \epsilon.$$

Observation.– 1) En fait, si f_0 est un plongement, on peut même demander que l'immersion isométrique f soit également un plongement.
2) Puisque le but est un espace euclidien, toute immersion est régulièrement homotope à une immersion courte...

Ici, la relation différentielle est

$$\mathcal{R} = Mono_{iso}(TM, TN) \subset X^{(1)} = Hom(TM, TN)$$

et on a $\mathcal{S}ol(\mathcal{R}) = I_{iso}(M, N)$ et $\Gamma(\mathcal{R}) = Mono_{iso}(TM, TN)$. Une version à paramètre de ce théorème montre qu'en fait

$$J : I_{iso}(M, N) \longrightarrow Mono_{iso}(TM, TN)$$

est une é. h. f.

Corollaire.– *On peut retourner la sphère $\mathbb{S}^2$ parmi les immersions isométriques C^1.*

Voici deux autres résultats paradoxaux se déduisant du théorème :

- Il existe un plongement C^1-isométrique de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ dans une boule de rayon arbitrairement petit.

- Soit Λ un réseau de $\mathbb{E}^2$. Il existe un immersion isométrique C^1 du tore plat $\mathbb{E}^2/\Lambda$ dans $\mathbb{E}^3$.

2.4 Existence d'une forme symplectique

Définition.– Une variété est dite *fermée* si elle est compacte sans bord, elle est dite *ouverte* si aucune de ses composantes connexes n'est fermée. En particulier une variété connexe dont le bord est non vide est ouverte.

Définition.– Une 2-forme $\beta \in \Omega^2(M^{2n})$ est dite *non dégénérée* si, en tout point $p \in M^{2n}$, on a $\beta_p^n \neq 0$. Elle est dite *symplectique* si de plus $d\beta = 0$.

Théorème (Gromov 1969).– *Soit M^{2n} une variété ouverte. Alors, toute 2-forme non dégénérée est homotope à une forme symplectique.*

Ici, il serait naturel de choisir $X = \{\beta \in \Lambda^2 T^*M \mid \beta^n \neq 0\}$ le fibré des formes bilinéaires antisymétriques non dégénérées, et $\mathcal{R} = \{\kappa \in X^{(1)} \mid d\kappa = 0\}$. Mais en réalité, le h-principe va porter sur une autre relation différentielle définie sur l'espace des 1-jets du fibré $E = T^*M$:

$$\mathcal{R}_0 = \{\kappa \in E^{(1)} \mid (d\kappa)^n \neq 0\}$$

où $d : E^{(1)} \longrightarrow \Lambda^2 T^*M$. Bien sûr $\mathcal{S}ol(\mathcal{R}_0) \subset \mathcal{S}ol(\mathcal{R})$ et il se trouve que $\Gamma(\mathcal{R}_0)$ et $\Gamma(X)$ sont homotopiquement équivalents (car d est une fibration), d'où le théorème.

• Il existe des versions plus élaborées où l'on impose la classe de cohomologie de la forme symplectique.

• Il existe aussi des versions en géométrie de contact.

2.5 Théorème de Lohkamp

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et M^n est une variété compacte C^∞. On $\mathcal{M}(M^n)$ l'espace des métriques sur M^n, puis $Ricci^{<\alpha}(M^n)$ (resp. $Scal^{<\alpha}(M^n)$) le sous-espace des métriques dont la courbure de Ricci $Ricci(g)$ (resp. la courbure scalaire $Scal(g)$) est en tout point plus strictement petite que α.

Théorème de Lohkamp (1995).– *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, (M^n, g_0) une variété riemannienne compacte de dimension $n \geq 3$, alors g_0 est homotope à une métrique g telle que $Ricci(g) < \alpha$. En fait, les relations différentielles*

$$Ricci(g) < \alpha \quad \textit{et} \quad Scal(g) < \alpha$$

sur l'espace des 2-jets des métriques satisfont au h-principe paramétrique. De plus, $Ricci^{<\alpha}(M^n)$ et $Scal^{<\alpha}(M^n)$ sont C^0-denses dans $\mathcal{M}(M^n)$.

• En particulier, si $n \geq 3$, la contrainte $Ricci(g) < 0$ n'impose *rien* sur la topologie de la variété...

• La dernière phrase du théorème signifie que toute métrique sur M^n compacte, $n \geq 3$, peut être approchée C^0 (mais pas C^1) par des métriques à courbure de Ricci négative ; par exemple la métrique usuelle de $\mathbb{S}^n$...

2.6 Théorème de Donaldson

Théorème de Donaldson (1996).– *Soient (M^{2n}, ω) une variété symplectique compacte lisse avec $\omega \in H^2(M^{2n}, \mathbb{Z})/Torsion$, J une structure presque complexe compatible*[3]*, $L \longrightarrow M^{2n}$ un fibré en droites complexes tel que $c_1(L) = \omega$ et ∇ une connexion hermitienne sur L de courbure $-2i\pi\omega$. Alors il existe $C > 0$ et une suite $s_N \in \Gamma(L^{\otimes N})$ de sections tels*

$$|\overline{\partial}_\nabla s_N(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{N}} |\partial_\nabla s_N(x)|$$

pour tout x dans le lieu d'annulation de s_N.

Ainsi les sections s_N sont asymptotiquement holomorphes sur un voisinage de leurs lieux d'annulation puisque

$$\frac{|\overline{\partial}_\nabla s_N(x)|}{|\partial_\nabla s_N(x)|} \longrightarrow 0$$

Le lieu d'annulation de s_N définit une sous-variété de codimension deux (réelle), si N est assez grand cette sous-variété est symplectique car quasi-complexe.

Contrairement aux autres énoncés, le h-principe est un peu caché ici. Ce que démontre réellement Donaldson est un résultat plus fort : l'existence de deux constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ et d'une suite de sections $s_N \in \Gamma(L^{\otimes N})$ telles que

$$|s_N| \leq C_2, \quad |\overline{\partial}_\nabla s_N| \leq C_2, \quad |\nabla s_N| \leq C_2\sqrt{N}$$

et

$$|\partial_\nabla s_N(x)| \geq C_1\sqrt{N} \quad \text{aux points } x \text{ où} \quad |s_N(x)| \leq C_1.$$

Ces contraintes définissent une suite de relations différentielles

$$\mathcal{R}_N \subset (L^{\otimes N})^{(1)}.$$

Soit $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R}_N)$, et $s_0 := bs\ \sigma$ la section de $L^{\otimes N}$ induite par σ. Donalson déforme $s_0 \in \Gamma(L^{\otimes N})$ en une solution s_N de $\mathcal{R}_N$ au moyen de sections "pic" à la Hörmander. Cette déformation s'étend en une homotopie dans $\Gamma(\mathcal{R}_N)$ entre σ et $j^1 s_N$.

[3] C'est-à-dire : $\omega(J., .)$ est une métrique.

3 Méthodes pour démontrer un h-principe

On distingue classiquement quatre techniques générales qui couvrent à peu près tous les cas connus. Deux h-principes célèbres leur échappent toutefois, le théorème de Lohkamp et celui de Donaldson.

3.1 La résolution des singularités

A priori, c'est la façon la plus naturelle pour démontrer l'existence d'un h-principe. On note Σ le complémentaire de $\mathcal{R}$ dans $X^{(r)}$ que l'on suppose être de codimension m au moins 1. On part d'une section holonomique $\sigma = j^r f \in \Gamma(X^{(r)})$ et il s'agit de déformer f en une section holonomique dont le r-jet évite Σ. Sauf miracle, si une telle déformation existe, elle ne se localise pas sur $\Sigma(f) = (j^r f)^{-1}(\Sigma)$. On est donc conduit à chercher des déformations localisées sur des sous-ensembles plus grands contenant $\Sigma(f)$ (penser à l'élimination des points doubles dans le lemme de Whitney).

Voici quelques théorèmes importants que l'on peut obtenir par cette technique :

- Théorèmes de classifications des immersions (Smale-Hirsh) et des submersions (Phillips).
- Classifications des applications singulières (Feit, Poénaru, Ando, Eliashberg).
- Immersions holomorphes des variétés Stein[4] (Gromov, Eliashberg).
- Théorème de classification des plongements de Haefliger.

Cette dernière application mérite un commentaire. Si $f : M \longrightarrow N$ est une application, on peut lui associer son carré cartésien :

$$\begin{array}{rccc} f \times f : & M \times M & \longrightarrow & N \times N \\ & (x, y) & \longmapsto & (f(x), f(y)). \end{array}$$

Il y a une action évidente de $\mathbb{Z}_2$ sur M^2 et N^2 qui échange les facteurs. Notons que :

$$\forall p \in M^2,\ \forall \sigma \in \mathbb{Z}_2,\ \ f \times f(\sigma(p)) = \sigma(f \times f(p)),$$

[4]On appelle *variété Stein* toute sous-variété complexe d'un certain $\mathbb{C}^N$.

et que $(f \times f)^{-1}(\Delta N) \supset \Delta M$ avec l'égalité si et seulement si f est injective.

Définition. – Une application $F : M^2 \longrightarrow N^2$ est dite $\mathbb{Z}_2$-*équivariante* si pour tout couple $(x_1, x_2) \in M^2$, on a :

$$F(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \Rightarrow F(x_2, x_1) = (y_2, y_1).$$

Elle est dite $\mathbb{Z}_2$-*isovariante* si de plus $F^{-1}(\Delta N) = \Delta M$.

Notons $E(M, N)$ l'espace des plongements C^∞ de M dans N. On a le diagramme commutatif suivant (avec des notations évidentes) :

$$\begin{array}{ccccc} & E(M,N) & \stackrel{i}{\longrightarrow} & C^\infty(M,N) & \\ f \stackrel{\times}{\mapsto} f \times f & \downarrow & & \downarrow & f \stackrel{\times}{\mapsto} f \times f \\ & \mathbb{Z}_2 - Iso(M^2, N^2) & \stackrel{j}{\longrightarrow} & \mathbb{Z}_2 - Equi(M^2, N^2). & \end{array}$$

Un corollaire du théorème de classification des plongements de Haefliger s'énonce ainsi :

Théorème (Haefliger 1962). – *Si* $N = \mathbb{R}^n$ *et* $m = dim\ M > 1$ *alors*

$$\times_\sharp : \pi_0(E) \longrightarrow \pi_0(Iso)$$

est une bijection si $3m + 4 \leq 2n$ *et une surjection si* $3m + 3 = 2n$.

Ce théorème se lit comme un h-principe. Le jet d'une fonction f est remplacé par son carré cartésien $f \times f$, l'espace des sections des jets est $Equi$, l'espace des sections de la relation différentielle est $\Gamma(\mathcal{R}) = Iso \subset Equi$, les solutions de $\mathcal{R}$ sont les plongements.

A ma connaissance, la technique d'élimination des singularités ne permet pas d'obtenir les résultats suivants :

- Théorèmes des plongements C^1-isométriques (Nash-Kuiper).
- Théorèmes des plongements C^∞-isométriques (Nash).
- Théorème de relaxation de Filippov (théorie du contrôle).

Je ne connais qu'un ouvrage qui propose un large panorama de ces techniques d'éliminations des singularités, le fameux [7] de Gromov ; pour des éclairages plus spécifiques, on peut lire Poénaru [12], Eliashberg-Mischachev [4] et Haefliger [8].

3.2 L'approximation holonomique

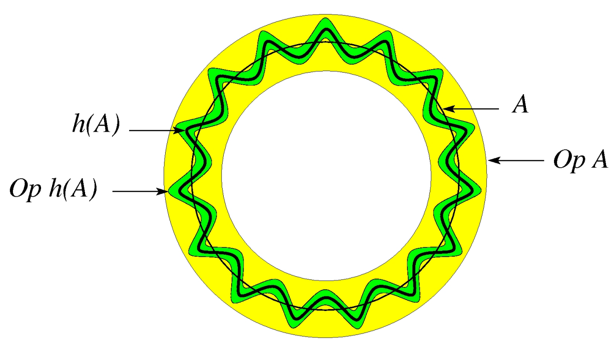
Dans [3], Y. Eliashberg et N. Mishachev mettent en évidence qu'un nombre considérable de h-principes découle d'une propriété générale des sections holonomes (et non directement de la relation différentielle). La question de départ est la suivante : soit $F_0 : M \longrightarrow J^1(M, N)$ une section, peut-on approcher F_0 par une section holonomique F, c'est-à-dire, une section pour laquelle il existe $f : M \longrightarrow N$ telle que $F = j^1 f$? La réponse est non en général, mais, et à condition d'être un peu moins exigeant, on peut tout de même obtenir une réponse positive.

Théorème d'approximation holonomique (Eliashberg, Mishachev 2001). *−Soit $A \subset M$ un polyèdre de codimension plus grande que 1, et soit $F_0 : \mathcal{O}p\, A \longrightarrow J^1(M, N)$. Alors, $\forall \delta, \epsilon \in C^0(M, \mathbb{R}_+^*)$, il existe une difféotopie $h^\tau : M \longrightarrow M$ δ-petite ($h^0 = id_M$, $h := h^1$) avec $h^1(A) \subset \mathcal{O}p\, A$ et une section holonomique $F : \mathcal{O}p\, h(A) \longrightarrow J^1(M, N)$ telle que :*

$$\forall p \in \mathcal{O}p\, h(A),\ dist(F(p), F_0(p)) < \epsilon(p).$$

Voici quelques précisions sur les notations : $\mathcal{O}p\, A$ = voisinage ouvert de A ; polyèdre = sous-complexe d'une triangulation de M ; M, N, $J^1(M, N)$ sont munis de métriques afin de donner un sens à *dist* ; une difféotopie h^τ est δ-petite si $h^0 = id$ et

$$\forall p \in M,\ \forall \tau \in [0, 1],\ dist(h^\tau(p), p) < \delta(p).$$



Le théorème d'approximation holonomique permet de retrouver un théorème célèbre de Gromov portant sur les relations $Diff(M)$-invariantes :

Théorème (Gromov, 1969). *− Soit M une variété ouverte, $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ une relation ouverte et $Diff(M)$-invariante alors $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe* *paramétrique.*

La démonstration est si courte que je la fais figurer :

Démonstration.– Si M une variété ouverte, il existe un polyèdre $A \subset M$ de codimension plus grande que 1, tel que M puisse être compressée par une isotopie $\varphi_t : M \longrightarrow M$ dans un voisinage arbitrairement petit $\mathcal{O}p\, A$ de A. Soit $F_0 : \mathcal{O}p\, A \longrightarrow \mathcal{R} \subset J^1(M, N)$, d'après le théorème d'approximation holonomique il existe une section holonomique $F : \mathcal{O}p\, h(A) \longrightarrow J^1(M, N)$ arbitrairement proche de F_0 et puisque $\mathcal{R}$ est ouverte, on peut supposer $F : \mathcal{O}p\, h(A) \longrightarrow \mathcal{R}$. Notons $f : \mathcal{O}p\, h(A) \longrightarrow N$ la fonction telle que $F = j^1 f$. Alors $j^1(f \circ h^{-1})$ est une section $\mathcal{R}$ au dessus de $\mathcal{O}p\, A$ car $\mathcal{R}$ est $Diff(M)$-invariante, pour la même raison $f \circ h^{-1} \circ \varphi_1^{-1}$ est une solution de $\mathcal{R}$ définie sur tout M. $\square$

Observation.– 1) La condition d'invariance par le groupe de Lie des difféomorphismes $G = Diff(M)$ peut être assouplie. On peut remplacer G par un sous groupe de Lie $U \subset G$ suffisamment *large* (voir [3], p. 139 ou [7], p. 83 pour une définition et plus de détails). Par exemple, on peut remplacer $Diff(M)$ par la composante de l'identité du groupe des difféomorphismes de contact à support compact ou par le groupe des difféomorphismes hamiltonniens à support compact d'une variété symplectique

2) En dépit de l'hypothèse "M ouverte" ce théorème permet parfois d'obtenir des résultats sur des variétés fermées, l'idée consistant simplement à épaissir la variété fermée en une variété ouverte (c'est la *micro-extension*).

Voici quelques résultats qui découlent plus ou moins directement de la méthode de l'approximation holonomique[5] :

- Théorèmes de classifications des immersions (Smale-Hirsh) et des submersions (Phillips).
- Théorèmes de classifications des immersions lagrangiennes (Gromov, Lees) et legendriennes (Gromov, Duchamp)
- h-principe pour les structures symplectiques et de contact sur les

[5] C'est moi qui donne ce nom à ce type de méthode. En fait, l'approximation holonomique est une version de la méthode dite *des faisceaux continus* ou encore de *recouvrement des homotopies.*

variétés ouvertes (Gromov).

- h-principe pour les feuilletages sur les variétés ouverte[6] (Haefliger)

Voici quelques résultats qui lui échappent :

- Théorèmes des plongements C^1-isométriques (Nash-Kuiper).
- Théorèmes des plongements C^∞-isométriques (Nash).
- Théorème de relaxation de Filippov (théorie du contrôle).

Pour en savoir plus sur cette méthode, on peut lire Haefliger [8], Poénaru [12] , Gieges [6], Adachi [1], Eliashberg-Mischachev [3] et Gromov [7].

3.3 L'intégration convexe

Cette méthode, due à Gromov, est une généralisation des idées développées par Nash pour démontrer le théorème des plongements isométriques C^1. La philosophie est la suivante : étant donnée une relation différentielle $\mathcal{R}$, on va s'intéresser à son enveloppe convexe $Conv(\mathcal{R})$ plutôt que de chercher à résoudre directement $\mathcal{R}$. Dans le langage de la théorie du contrôle, on dit que $Conv(\mathcal{R})$ est une relaxation de $\mathcal{R}$. Dans de nombreux cas $Conv(\mathcal{R})$ est considérablement plus facile à résoudre que $\mathcal{R}$ et l'on obtient "facilement" des solutions. L'intégration convexe est un procédé permettant de passer d'une solution formelle de $Conv(\mathcal{R})$ à une véritable solution de $\mathcal{R}$.

Voici quelques résultats que l'on atteint avec cette méthode :

- Théorèmes de classifications des immersions[7] (Smale-Hirsh)
- Théorèmes des plongements C^1-isométriques (Nash-Kuiper).
- Théorème de relaxation de Filippov (théorie du contrôle).
- Classifications des immersions/plongements dirigées[8](Gromov).

[6]Il y a aussi un h-principe pour les feuilletages sur les variétés *fermées* (Thurston) mais je ne sais pas de quelle méthode il relève.

[7]Y compris le cas où la dimension de la source et celle du but sont égales (cf. [7] p. 181).

[8]La méthode de l'approximation holonomique permet également, dans certains cas, d'obtenir des résultats de classifications de d'immersions/plongements dirigées pour des variétés fermées, cf. [3] p. 45.

Voici quelques résultats qui lui échappent :

- Théorèmes de classifications des submersions (Phillips).
- Théorèmes de classifications des immersions lagrangiennes (Gromov, Lees) et legendriennes (Gromov, Duchamp)

Pour en savoir plus sur cette méthode, on peut lire Geiges [6], Spring [13], Eliashberg-Mishachev [3] et Gromov [7].

Au delà des applications plus ou moins directes, l'intégration convexe est un formidable outil pour produire des contre-exemples en EDP (voir [10] pour un panorama). Parmi ceux-ci, le plus célèbre est probablement le paradoxe de Scheffer-Shnirelman :

Théorème (Scheffer 1993-Shnirelman 1997).– *Il existe une solution faible (v, p) non nulle de l'équation d'Euler incompressible en dimension 2 sans forçage*

$$(E) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v \otimes v) + \nabla p = 0 \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases}$$

à support compact en espace-temps.

Rappelons que le couple (v, p) est une *solution faible* de (E) s'il satisfait à (E) au sens des distributions $\mathcal{D}'$ avec $v \in C(I, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2))^2 \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}^2 \times I)^2$ et $p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times I)$.

Voici ce que l'on peut lire dans [14] sur ce paradoxe :

Du point de vue physique, cet énoncé est "évidemment" absurde : il décrit un fluide initialement au repos, qui tout à coup se met à s'agiter spontanément, sans qu'aucune force ait été exercée sur lui ; après quoi il revient au repos de lui-même, violant outrageusement le principe de conservation de l'énergie.

Il revient à De Lellis et Székelyhidi d'avoir mis en lumière tout récemment (2008) le lien entre le résultat de Scheffer-Schnirelman et l'intégration convexe. Une analogie frappante se fait alors jour entre ce résultat et le théorème des plongements isométriques C^1 de Nash. Toujours dans [14], on peut lire :

Une obstruction (rigidité liée à la conservation de la courbure ou de l'énergie) est contournée grâce à un défaut de régularité (C^1 ou L^∞), et l'on s'autorise en outre la petitesse dans un espace de régularité encore inférieure (C^0 où H^{-1}) [...] Pour caricaturer, ce qui dans la démonstration du théorème [de Scheffer-Schnirelman] joue le rôle des "zigzags" utilisés pour le théorème [de Nash], ce sont des solutions particulières de l'équation d'Euler, oscillant rapidemment entre deux valeurs constantes du champ de vitesses.

3.4 L'inversion des opérateurs différentiels

Cette méthode occupe une bonne partie de l'ouvrage [7]. Il s'agit, en gros, de pousser le procédé de Nash-Moser dans ses derniers retranchements pour obtenir un certain nombre de théorèmes sur les plongements isométriques C^∞. Je ne suis jamais rentré dans les détails. Donc, je m'abstiens ici d'écrire quoi que ce soit sur cette méthode.

References

[1] M. Adachi, *Embeddings and immersions*, Translations of the Mathematical Monographs, Vol. 124, American Mathematical Society, 1993.

[2] J. Eells, *A setting for global analysis*, Bull. A. M. S., 72 (1966), 751-807.

[3] Y. Eliahsberg et N. Mishachev, *Introduction to the h-principle*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 48, A. M. S., Providence, 2002.

[4] Y. Eliahsberg et N. Mishachev, *Wrinkling of smooth mappings and its applications*, Inven. Math. 130 (1997), 345-369.

[5] J. Francis, *The h-principle, lectures 1 and 2: overview*, http://math.northwestern.edu/ jnkf/classes/hprin/

[6] H. Geiges, *h-Principle and Flexibility in Geometry*, Mem. of the A.M.S, 779, vol. 164, July 2003.

[7] M. Gromov, *Partial Differential Relations*, Springer-Verlag, 1986.

[8] A. Haefliger, *Lectures on the theorem of Gromov*, Lecture Notes in Math., vol. 209 (1971), 128-141.

[9] A. Haefliger, *Plongements différentiables dans le domaine stable*, Comm. Math. Helv. 37 (1962), 155-176.

[10] B. Kirchheim, S. Müller et V. Sverák, *Studying nonlinear PDE by geometry in matrix space*, Geometric analysis and nonlinear partial differential equations, Springer-Verlag, 2003, 347-395.

[11] R. Palais, *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds*, Topology 5 (1966), 1-16.

[12] V. Poénaru, *Homotopy theory and differentiable singularities*, Lecture Notes in Math., 197 (1971), 106-132.

[13] D. Spring, *Convex Integration Theory*, Monographs in Mathematics, Vol. 92, Birkhäuser Verlag, 1998.

[14] C. Villani, *Paradoxe de Scheffer-Shnirelman revu sous l'angle de l'intégration convexe*, Séminaire Bourbaki, 61 année, 2008-2009, n. 1001.