

# Intégration convexe 1-dimensionnelle

Vincent Borrelli

February 1, 2012

## 1 L'intégration convexe

**Notation.**— Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  et  $a \in A$ . On désigne par  $IntConv(A, a)$  l'intérieur de l'enveloppe convexe de la composante connexe par arcs contenant  $a$ .

**Définition.**— Un lacet  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $g(0) = g(1)$  entoure strictement  $z \in \mathbb{R}^n$  si

$$IntConv(g([0, 1])) \supset \{z\}.$$

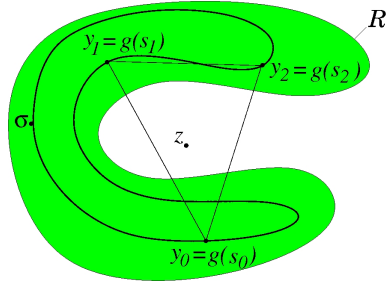
**Lemme fondamental.**— Soient  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$  une partie ouverte,  $\sigma \in \mathcal{R}$  et  $z \in IntConv(\mathcal{R}, \sigma)$ . Il existe un lacet  $h : [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathcal{R}$  basé en  $\sigma$  entoure strictement  $z$  et tel que :

$$z = \int_0^1 h(s) ds.$$

**Démonstration.**— Puisque  $z \in IntConv(\mathcal{R}, \sigma)$ , il existe un  $n$ -simplexe  $\Delta$  dont les sommets  $y_0, \dots, y_n$  sont inclus dans  $\mathcal{R}$  et tel que  $z$  soit dans l'intérieur de  $\Delta$ . Par conséquent, il existe aussi

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in ]0, 1[^{n+1}$$

tels que  $\sum_{k=0}^n \alpha_k = 1$  et  $z = \sum_{k=0}^n \alpha_k y_k$ . Tout lacet  $g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$  basé en  $\sigma$  et passant par  $y_0, \dots, y_n$  vérifie  $IntConv(g([0, 1])) \supset \{z\}$  i. e.  $g$  entoure  $z$ .



En général

$$z \neq \int_0^1 g(s) ds.$$

Notons  $s_0, \dots, s_n$  les temps où  $g(s_k) = y_k$  et soit  $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  telle que :

$$\text{i) } f_k < \eta_1 \text{ sur } [0, 1] \setminus [s_k - \eta_2, s_k + \eta_2],$$

$$\text{ii) } \int_0^1 f_k = 1,$$

avec  $\eta_1, \eta_2$  deux nombres strictement positifs arbitraires. On pose :

$$z_k := \int_0^1 g(s) f_k(s) ds.$$

Etant donné  $\epsilon > 0$ , on peut choisir  $\eta_1, \eta_2$  tels que :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad \|z_k - g(s_k)\| \leq \epsilon.$$

Comme  $\mathcal{R}$  est ouverte et  $z \in \text{Int } \Delta$ , si  $\epsilon$  est suffisamment petit on a

$$z \in \text{IntConv}(z_0, \dots, z_n).$$

Par conséquent, il existe  $(p_0, \dots, p_n) \in ]0, 1[^{n+1}$  tels que  $\sum_{k=0}^n p_k = 1$  et :

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=0}^n p_k z_k &= \sum_{k=0}^n p_k \int_0^1 g(s) f_k(s) ds \\ &= \int_0^1 g(s) \sum_{k=0}^n p_k f_k(s) ds &= \int_0^1 g(s) \varphi'(s) ds \end{aligned}$$

où on a posé

$$\varphi'(s) := \sum_{k=0}^n p_k f_k(s)$$

et

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ s &\longmapsto \int_0^s \varphi(u) du. \end{aligned}$$

On a  $\varphi'(s) > 0$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(1) = 1$ . Donc  $\varphi$  est un difféomorphisme strictement croissant de  $[0, 1]$  dans lui-même. Effectuons le changement de variable  $s = \varphi^{-1}(t)$ , c'est-à-dire  $t = \varphi(s)$ , on a

$$dt = \varphi'(s) ds$$

d'où :

$$z = \int_0^1 g(s) \varphi'(s) ds = \int_0^1 g \circ \varphi^{-1}(t) dt.$$

Ainsi  $h = g \circ \varphi^{-1}$  convient. □

**Remarque.**— A priori  $h \in \Omega_\sigma(\mathcal{R})$ , mais il est bien évident que l'on peut choisir  $h$  parmi les “allers-retours” i. e. l'espace :

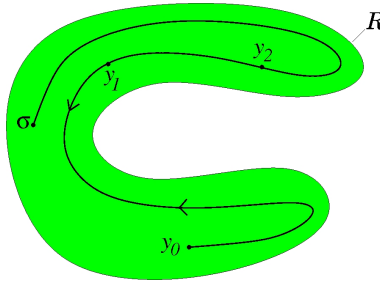
$$\Omega_\sigma^{AR}(\mathcal{R}) = \{h \in \Omega_\sigma(\mathcal{R}) \mid \forall s \in [0, 1] \ h(s) = h(1 - s)\},$$

l'intérêt étant que maintenant on a affaire avec un espace contractible. Pour tout  $u \in [0, 1]$ , on note alors  $h_u : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{R}$  l'application définie par

$$h_u(s) = \begin{cases} h(s) & \text{si } s \in [0, \frac{u}{2}] \cup [1 - \frac{u}{2}] \\ h(u) & \text{si } s \in [\frac{u}{2}, 1 - \frac{u}{2}]. \end{cases}$$

L'homotopie ainsi définie rétracte  $\Omega_\sigma^{AR}(\mathcal{R})$  sur l'application constante

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : [0, 1] &\longrightarrow \mathcal{R} \\ s &\longmapsto \sigma. \end{aligned}$$



**Lemme fondamental (version paramétrique).** – Soient  $P$  une variété compacte,  $E = P \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} P$  un fibré trivial,  $\mathcal{R} \subset E$  une partie telle que

$$\forall p \in P, \mathcal{R}_p := \pi^{-1}(p) \cap \mathcal{R} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n$$

Soient encore  $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$  et  $z \in \Gamma(E)$  tel que :

$$\forall p \in P, z(p) \in \text{IntConv}(\mathcal{R}_p, \sigma(p)).$$

Alors il existe  $h : P \times [0, 1] \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{R}$  telle que :

$$h(\cdot, 0) = h(\cdot, 1) = \sigma \in \Gamma^\infty(\mathcal{R}), \quad \forall p \in P, h(p, \cdot) \in \Omega_{\sigma(p)}^{AR}(\mathcal{R}_p)$$

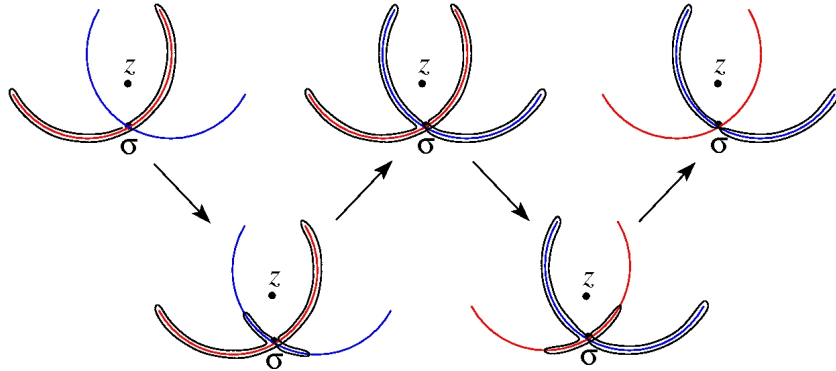
et

$$\forall p \in P, z(p) = \int_0^1 h(p, s) ds.$$

**Démonstration.**– Elle est longue et technique. Le problème est le suivant : dans le lemme précédent, tout repose sur l'existence de points  $y_0, \dots, y_n$  de  $\mathcal{R}$  tel que  $z \in \text{IntConv}(\{y_0, \dots, y_n\})$ . Si l'on rajoute un paramètre, pour pouvoir mimer la démonstration précédente, il faudrait être capable de suivre ces points continûment au dessus de  $P$ , autrement dit, s'assurer de l'existence de  $(n + 1)$  applications  $y_0, \dots, y_n : P \rightarrow \mathbb{R}^n$  telles que

$$\forall p \in P, z(p) \in \text{IntConv}(\{y_0(p), \dots, y_n(p)\}).$$

Ce programme est possible localement. Au dessus d'un ouvert  $\mathcal{U}$  on obtient ainsi des applications  $h_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \times [0, 1] \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{R}$  qu'il faut recoller entre elles. Pour cela on s'appuie sur la contractibilité des chemins en aller-retour. La suite de dessins ci-dessous devrait être éclairante.



Une homotopie parmi les chemins entourant  $z$  qui joint  $h_{\mathcal{U}}$  (support en rouge) à  $h_{\mathcal{V}}$  (support en bleu).

On obtient ainsi une application  $h : P \times [0, 1] \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{R}$  globalement définie telle que

$$\forall p \in P, \quad z(p) \in \text{IntConv}(h(p, [0, 1]))$$

et

$$h(., 0) = h(., 1) = \sigma \in \Gamma^\infty(\mathcal{R}), \quad \forall p \in P, \quad h(p, .) \in \Omega_{\sigma(p)}^{AR}(\mathcal{R}_p).$$

Il faut ensuite reparamétriser l'application  $h$  de façon à s'assurer que

$$\forall p \in P, \quad z(p) = \int_0^1 h(p, s) ds.$$

Pour plus de détails, voir [3] p. 29-31. □

**Lemme fondamental (version paramétrique  $C^\infty$ ).** – Soient  $P$  une variété compacte,  $E = P \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} P$  un fibré trivial,  $\mathcal{R} \subset E$  une partie telle que

$$\forall p \in P, \quad \mathcal{R}_p := \pi^{-1}(p) \cap \mathcal{R} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n$$

Soient encore  $\sigma \in \Gamma^\infty(\mathcal{R})$  et  $z \in \Gamma^\infty(E)$  tels que :

$$\forall p \in P, \quad z(p) \in \text{IntConv}(\mathcal{R}_p, \sigma(p)).$$

Alors il existe  $h : P \times [0, 1] \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{R}$  telle que :

$$h(., 0) = h(., 1) = \sigma \in \Gamma(\mathcal{R}), \quad \forall p \in P, \quad h(p, .) \in \Omega_{\sigma(p)}^{AR}(\mathcal{R}_p)$$

et

$$\forall p \in P, \quad z(p) = \int_0^1 h(p, s) ds.$$

**Démonstration.**– Soit  $(\rho_\epsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R})_{\epsilon > 0}$  une suite de fonctions régularisantes. Pour tout  $p \in P$ , on définit une application  $C^\infty$  par

$$h_\epsilon(p, .) : \quad \begin{array}{ll} [0, 1] & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto (h(p, .) * \rho_\epsilon)(t). \end{array}$$

Posons

$$z_\epsilon(p) := \int_0^1 h_\epsilon(p, t) dt$$

et soit  $H_\epsilon : P \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  donnée par

$$H_\epsilon(p, t) := h_\epsilon(p, t) + z(p) - z_\epsilon(p).$$

On a

$$\int_0^1 H_\epsilon(p, t) dt = z(p)$$

et pour un choix suffisamment petit de  $\epsilon$  l'application  $t \mapsto H_\epsilon(p, t)$  est à valeur dans  $\mathcal{R}_p$ . La compacité de  $P$  permet de choisir  $\epsilon$  indépendamment de  $p \in P$ .  $\square$

## 2 $C^0$ -densité

**Proposition 1.**— Soit  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert connexe par arcs et  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Si  $f_0 \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$  est telle que

$$f_0'(I) \subset \text{IntConv}(\mathcal{R})$$

alors, pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $F \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$  telle que

$$F'(I) \subset \mathcal{R} \text{ et } \|F - f_0\|_{C^0} < \epsilon$$

**Démonstration.**— Soit  $\epsilon > 0$  et  $f_0 \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$  telle que  $f_0'(I) \subset \text{IntConv}(\mathcal{R})$ . D'après le lemme fondamental, version lisse, il existe  $h : I \times \mathbb{E}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{R}$  de classe  $C^\infty$  telle que

$$\forall t \in I, f_0'(t) = \int_0^1 h(t, u) du.$$

Définissons  $F \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$  par

$$F(t) := f_0(0) + \int_0^t h(s, Ns) ds$$

où  $N$  est un entier naturel non nul. D'une part, en dérivant, on obtient:

$$F'(t) = h(t, Nt) \in \mathcal{R}$$

et par conséquent, l'application  $f$  est donc solution de la relation différentielle

$\mathcal{R}$ . D'autre part

$$\begin{aligned}
F(t) - f_0(t) &= f_0(0) + \int_0^t h(s, Ns) ds - f_0(t) \\
&= \int_0^t h(s, Ns) ds - (f_0(t) - f_0(0)) \\
&= \int_0^t h(s, Ns) ds - \int_0^t f_0'(s) ds \\
&= \int_0^t h(s, Ns) ds - \int_0^t \left( \int_0^1 h(s, u) du \right) ds \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^t (h(s, Ns) - h(s, u)) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \int_0^1 \left( \int_0^{Nt} \left( h\left(\frac{s}{N}, s\right) - h\left(\frac{s}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \int_0^1 \left( \int_0^{\lceil Nt \rceil} \left( h\left(\frac{s}{N}, s\right) - h\left(\frac{s}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&\quad + \frac{1}{N} \int_0^1 \left( \int_{\lceil Nt \rceil}^{Nt} \left( h\left(\frac{s}{N}, s\right) - h\left(\frac{s}{N}, u\right) \right) ds \right) du
\end{aligned}$$

Avec des notations évidentes, posons

$$F(t) - f_0(t) = A + B$$

Nous allons traiter chacun de ces deux termes.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{N} \int_0^1 \left( \int_0^{[Nt]} \left( h\left(\frac{s}{N}, s\right) - h\left(\frac{s}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \left( \int_k^{k+1} \left( h\left(\frac{s}{N}, s\right) - h\left(\frac{s}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( h\left(\frac{s+k}{N}, s+k\right) - h\left(\frac{s+k}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \left( \int_0^1 \left( h\left(\frac{s+k}{N}, s\right) - h\left(\frac{s+k}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \int_0^1 \left( h\left(\frac{s+k}{N}, s\right) - h\left(\frac{k}{N}, s\right) \right) ds du \\
&\quad - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \int_0^1 \left( h\left(\frac{s+k}{N}, u\right) - h\left(\frac{k}{N}, u\right) \right) ds du \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \int_0^1 \left( h\left(\frac{k}{N}, s\right) - h\left(\frac{k}{N}, u\right) \right) ds du \\
&= C + D + E
\end{aligned}$$

Le dernier terme est nul ( $s$  et  $u$  jouent des rôles symétriques). Les termes  $C$  et  $D$  vérifient les relations suivantes:

$$\|C\| \leq \frac{1}{2N} \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{C^0} \quad \text{et} \quad \|D\| \leq \frac{1}{2N} \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{C^0}.$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}
\|A\| &\leq \|C\| + \|D\| \\
&\leq \frac{1}{N} \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{C^0}
\end{aligned}$$

Quant au terme  $B$ , il vérifie

$$\|B\| \leq \frac{2}{N} \|h\|_{C^0}$$

et donc finalement:

$$\|F - f_0\|_{C^0} \leq \frac{2}{N} \left( \|h\|_{C^0} + \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{C^0} \right).$$



Ce majorant peut être rendu arbitrairement petit en choisissant  $N$  suffisamment grand.  $\square$

**Remarque.**— Même si  $f_0(0) = f_0(1)$ , l'application  $F$  construite par intégration convexe ne vérifie pas en général  $F(0) = F(1)$ . On peut néanmoins adapter le procédé de l'intégration convexe pour construire des solutions  $f$  telles que  $f(0) = f(1)$ .

**Corollaire.**— Soient  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $E = C \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} C$  le fibré trivial sur le cube  $C = [0, 1]^m$ ,  $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$  et  $f_0 : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

$$\forall c = (c_1, \dots, c_m) \in [0, 1]^m, \quad \frac{\partial f_0}{\partial c_m}(c) \in \text{IntConv}(\mathcal{R}_c, \sigma(c))$$

où  $\mathcal{R}_c = \pi^{-1}(c) \cap \mathcal{R}$ . Alors, pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $f : C \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

- i)  $\frac{\partial f}{\partial c_m} \in \Gamma(\mathcal{R})$
- ii)  $\frac{\partial f}{\partial c_m}$  est homotope à  $\sigma$  dans  $\Gamma(\mathcal{R})$
- iii)  $\|f - f_0\|_{C^{1, \hat{m}}} \leq \epsilon$ .

**Notation.**— Dans cet énoncé, on a noté

$$\|f\|_{C^{1, \hat{m}}} = \max(\|f\|_{C^0}, \|\frac{\partial f}{\partial c_1}\|_{C^0}, \dots, \|\frac{\partial f}{\partial c_{m-1}}\|_{C^0})$$

la norme  $C^1$  sans le terme  $\|\frac{\partial f}{\partial c_m}\|_{C^0}$ .

**Démonstration.**— Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout  $c = (c_1, \dots, c_m) \in C$ , on définit

$$f(c_1, \dots, c_m) := f_0(c_1, \dots, c_{m-1}, 0) + \int_0^{c_m} h(c_1, \dots, c_{m-1}, s, Ns) ds.$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial c_m}(c_1, \dots, c_m) = h(c_1, \dots, c_{m-1}, c_m, Nc_m) \in \mathcal{R}_c$$

et  $\frac{\partial f}{\partial c_m}(c_1, \dots, c_m)$  est homotope à  $\sigma(c)$  par

$$\sigma_u(c) := h_u(c_1, \dots, c_{m-1}, c_m, Nc_m)$$

où  $h_u$  est la contraction décrite dans la remarque qui suit le lemme fondamental. La démonstration de la proposition 1 montre que

$$\|f - f_0\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

En reprenant la même démarche, on montre que l'on a également

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial c_j} - \frac{\partial f_0}{\partial c_j} \right\|_{C^0} = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

pour tout  $j \in \{1, \dots, m-1\}$ . □

**Proposition 2.**— Soient  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert connexe par arcs et  $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$  telle que

$$f'_0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \text{IntConv}(\mathcal{R}).$$

Alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $f \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$  telle que

$$f'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \mathcal{R} \text{ et } \|f - f_0\|_{C^0} < \epsilon$$

**Démonstration.**— Reprenons  $F \in C^\infty([0, 1]; \mathbb{R}^n)$  construite grâce à la première proposition et, pour tout  $t \in [0, 1]$ , définissons  $f$  par

$$\begin{aligned} f(t) &:= F(t) - t(F(1) - F(0)) \\ &= f_0(0) + \int_0^t h(s, Ns) ds - t \int_0^1 h(s, Ns) ds \end{aligned}$$

En dérivant, on obtient:

$$\forall t \in [0, 1], \quad f'(t) = F'(t) - (F(1) - F(0)).$$

Désignons par  $\delta$  le réel strictement positif défini par:

$$\delta = \text{dist}(F'[0, 1], \mathcal{R}^c)$$

et choisissons  $N$  tel que

$$\|F(1) - F(0)\| < \frac{\delta}{2}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\|f' - F'\|_{C^0} &= \|F(1) - F(0)\| \\
&= \|F(1) - f_0(0)\| \\
&= \|F(1) - f_0(1)\| \\
&< \frac{\delta}{2}
\end{aligned}$$

Soit  $x \in \mathcal{R}$ . On a:

$$d(x, f'[0, 1]) \geq |d(x, F'[0, 1]) - d(f'[0, 1], F'[0, 1])|$$

Or  $d(x, f'[0, 1]) \geq \delta$  et  $d(f'[0, 1], F'[0, 1]) \leq \frac{\delta}{2}$  donc

$$d(x, f') \geq \frac{\delta}{2}.$$

On en déduit  $d(\mathcal{R}^c, f'[0, 1]) > 0$ , c'est-à-dire

$$f'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \mathcal{R}.$$

L'application  $f$  est donc bien solution de la relation différentielle. En outre, de l'égalité

$$f(t) = F(t) - t(F(1) - F(0))$$

on déduit:

$$\|f - f_0\|_{C^0} \leq \|F - f_0\|_{C^0} + \|F(1) - F_0(1)\| \leq 2\|F - f_0\|_{C^0}.$$

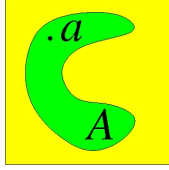
□

**Remarque 1.**— Dans les deux propositions précédentes, les paramètres libres de la construction de la solution de la relation différentielle sont la famille de lacets  $(h(p, \cdot))_{p \in P}$  et le choix du nombre d'oscillations  $N$ .

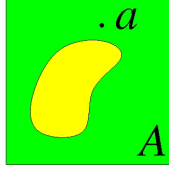
**Remarque 2.**— Evidemment, les propositions 1 et 2 ont des analogues “à paramètres”.

### 3 Un $h$ -principe 1-dimensionnel

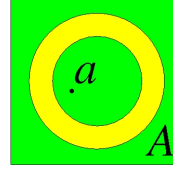
**Définition.**— Une partie  $A \subset \mathbb{R}^n$  est *ample* si  $A = \emptyset$  ou si pour tout  $a \in A$  l'intérieur de l'enveloppe convexe de la composante connexe par arcs de  $A$  contenant  $a$  est  $\mathbb{R}^n$  i. e. :  $IntConv(A, a) = \mathbb{R}^n$ .



A est non ample



A est ample



A est non ample.

**Exemple.**– Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  est ample si et seulement si  $\text{Codim } F \geq 2$ .

**Définition.**– Si  $E = P \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} P$  est un fibré, on dit que  $\mathcal{R} \subset E$  est *ample* si, pour tout  $p \in P$ ,  $\mathcal{R}_p := \pi^{-1}(p) \cap \mathcal{R}$  est ample dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque.**– Si  $\mathcal{R} \subset E$  est ample, alors, pour tout  $p \in P$ , la condition  $z(p) \in \text{Conv}(\mathcal{R}_p, \sigma(p))$  est automatiquement vérifiée.

**Proposition 3.**– Soient  $E = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  un fibré trivial et  $\mathcal{R} \subset E$  une relation différentielle ouverte et ample. Alors pour tout  $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$ , il existe  $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

- i)  $f' \in \Gamma(\mathcal{R})$ , autrement dit  $f \in \text{Sol}(\mathcal{R})$ ,
- ii)  $f'$  est homotope à  $\sigma$  dans  $\Gamma(\mathcal{R})$ .

**Remarque.**– L'inclusion naturelle

$$\pi_0(\text{Sol}(\mathcal{R})) \longrightarrow \pi_0(\Gamma(\mathcal{R}))$$

est donc une surjection.

**Démonstration.**– Soit  $f_0 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application  $C^1$  quelconque. Puisque  $\mathcal{R}$  est ample, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad f'_0(t) \in \mathbb{R}^n = \text{IntConv}(\mathcal{R}_t, \sigma(t)).$$

D'après la démonstration de la proposition 2, l'application  $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$\forall t \in [0, 1], \quad f(t) := f_0(0) + \int_0^t h(s, Ns) ds - t \int_0^1 h(s, Ns) ds$$

vérifie

$$\forall t \in [0, 1], \quad f'(t) \in \mathcal{R}_t$$

ce qui montre i). Pour tout  $u \in [0, 1]$ , définissons  $f_u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  par

$$\forall t \in [0, 1], \quad f_u(t) := f_0(0) + \int_0^t h_u(s, Ns) ds - u.t \int_0^1 h(s, Ns) ds$$

où  $h_u : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$  est la rétraction naturelle

$$h_u(t, s) = \begin{cases} h(t, s) & \text{si } s \in [0, \frac{u}{2}] \cup [1 - \frac{u}{2}, 1] \\ h(t, u) & \text{si } s \in [\frac{u}{2}, 1 - \frac{u}{2}]. \end{cases}$$

Bien sûr  $h_1(t, s) = h(t, s)$  et  $h_0(t, s) = \sigma(t)$ . Notons que  $f_u$  ne passe pas au quotient  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1]/\partial[0, 1]$ . En revanche

$$f'_u(t) = h_u(t, Nt) - u \int_0^1 h(s, Ns) ds$$

induit une application de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{R}^n$  car

$$f'_u(0) = h_u(0, 0) - u \int_0^1 h_u(s, Ns) ds = \sigma(0) - u \int_0^1 h(s, Ns) ds$$

$$f'_u(1) = h_u(1, N) - u \int_0^1 h_u(s, Ns) ds = \sigma(1) - u \int_0^1 h(s, Ns) ds$$

et donc  $f'_u(0) = f'_u(1)$  puisque  $\sigma(0) = \sigma(1)$ . Ceci fournit une homotopie  $\sigma_u := f'_u$  joignant  $f' = f'_1$  à  $\sigma$ . D'après la proposition 1, la quantité

$$\left\| \int_0^1 h(s, Ns) ds \right\| = \|F(1) - f_0(1)\|$$

est un  $O\left(\frac{1}{N}\right)$  et peut donc être rendu arbitrairement petite. Ainsi pour tout  $u \in [0, 1]$ , tout  $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , le point  $\sigma_u(t)$  est arbitrairement proche de  $h_u(t, Nt) \in \mathcal{R}$ . Puisque  $\mathcal{R}$  est ouverte, il existe  $N$  tel que pour tout  $u \in [0, 1]$ , on ait  $\sigma_u \in \Gamma(\mathcal{R})$ . Le point ii) est donc démontré.  $\square$

Une version à paramètre de ce que l'on vient de faire montre le théorème suivant :

**Théorème (*h-principe 1-dimensionnel*).**— Soient  $E = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  un fibré trivial et  $\mathcal{R} \subset E$  une relation différentielle ouverte et ample, alors l'application

$$J : \text{Sol}(\mathcal{R}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie faible.

**Observation.**— Evidemment, dans ce théorème, on peut remplacer  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  par un intervalle.

## 4 Deux applications de l'intégration convexe 1-dimensionnelle

### 4.1 Le théorème de Whitney-Graustein

**Théorème de Whitney-Graustein (1937).** – On a :  $\pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) \simeq \mathbb{Z}$ , l'identification étant donnée par l'indice.

**Démonstration.**– Il suffit d'appliquer le théorème du  $h$ -principe 1-dimensionnel avec  $n = 2$  et  $\mathcal{R} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$  qui est ouverte et ample. On a alors

$$\text{Sol}(\mathcal{R}) = I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2), \quad \Gamma(\mathcal{R}) = C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$$

et

$$J : \text{Sol}(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R}) \\ \gamma \longmapsto \gamma'$$

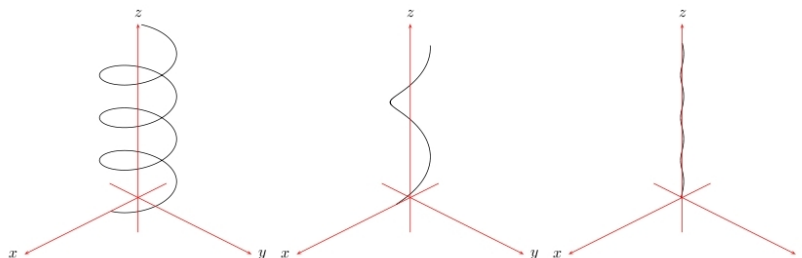
induit une bijection au niveau du  $\pi_0$ . Or, les composantes de  $C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$  sont en bijection avec  $\mathbb{Z}$ , la bijection étant donnée par le nombre de tours. Autrement dit,  $J$  s'identifie à  $\text{Ind}$ .  $\square$

### 4.2 Un théorème de Ghomi

**Théorème (Ghomi 2007).**– Soient  $f_0 \in I(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$  une courbe de courbure  $k_0$  et  $c$  un nombre réel tel que  $c > \max k_0$ . Alors pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $f_1 \in I(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$  de courbure constante  $c$  et telle que

$$\|f_1 - f_0\|_{C^1} = \|f_1 - f_0\|_{C^0} + \|f_1' - f_0'\|_{C^0} \leq \epsilon.$$

**Un exemple.**– Comment approcher  $C^1$  une droite par une courbe de courbure aussi grande que l'on souhaite ? La réponse tient en un dessin :



Un petit commentaire toutefois (tiré de [2]) : Paramétrons la droite comme un segment vertical dans l'espace,

$$f_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

avec  $t \in [0, 1]$ . Le théorème affirme l'existence d'une courbe à courbure constante  $c$  qui est  $C^1$ -proche de  $f_0$ . On peut commencer par approximer le segment par une hélice, par exemple :

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} \epsilon \cos \alpha t \\ \epsilon \sin \alpha t \\ t \end{pmatrix}$$

où  $\alpha > 0$  et  $\epsilon > 0$ . La  $C^0$  proximité de  $f_1$  à  $f_0$  est contrôlée par  $\epsilon$ , quant à la courbure, elle est constante et peut être rendue aussi grande qu'on le souhaite en réduisant  $\alpha$ . Cependant, lorsque le nombre  $\alpha$  devient élevé, la dérivée s'éloigne beaucoup de celle de la fonction d'origine, l'hélice n'est donc pas  $C^1$ -proche de  $f_0$ . Pour corriger ce point, il faut réduire les variations horizontales de la fonction. Notons  $k > 0$  et  $\tau$  deux réels et considérons

$$f_{k,\tau}(t) = \begin{pmatrix} \frac{k}{k^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k^2 + \tau^2} t \\ \frac{k}{k^2 + \tau^2} \sin \sqrt{k^2 + \tau^2} t \\ \frac{\tau}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} t \end{pmatrix}.$$

Cette application est une hélice de courbure  $k$  et de torsion  $\tau$  (constantes). On voit alors immédiatement qu'il faut garder une torsion très supérieure à la courbure pour assurer une dérivée quasi-verticale.

**Esquisse de démonstration.**— Celle-ci est un bon exemple d'utilisation des idées de l'intégration convexe 1-dimensionnelle bien que ce ne soit pas une application du théorème du  $h$ -principe 1-dimensionnel. En voici les principales étapes :

1) Se ramener au cas où  $f_0$  est paramétrée par la longueur d'arc. La courbure est alors la norme de la dérivée seconde, autrement dit la vitesse de  $T_0 := f'_0 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^2$ .

2) Trouver  $T_1 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^2$ , de vitesse constante en norme (pour avoir

une courbure constante) qui soit  $C^0$ -proche de  $T_0$  (pour s'assurer de la condition  $\|f'_1 - f'_0\|_{C^0}$  petit) et proche en moyenne de  $T_0$  (pour la condition  $\|f_1 - f_0\|_{C^0}$  petit).

3) Techniquement, il faut faire effectuer à  $T_1$  des petites boucles à vitesse constante dans un voisinage de  $T_0(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$  dans  $S^2$  et de telle façon que la moyenne par boucle soit proche de celle de  $T_0$  sur l'intervalle correspondant.

Pour plus de détails, on pourra consulter [1] ou aller télécharger sur ma page ouaib le rapport de stage de Mickaël Kourganov [2].  $\square$

## References

- [1] M. GHOMI, *h-principles for curves and knots of constant curvature*, Geom. Dedicata 127, 19-35, 2007. <http://tinyurl.com/399y78f>
- [2] M. KOURGANOV *h-principe pour les courbes courbure constante*, rapport de stage ENS-Lyon, <http://math.univ-lyon1.fr/borrelli/Jeunes.html>
- [3] D. SPRING, *Convex Integration Theory*, Monographs in Mathematics, Vol. 92, Birkhäuser Verlag, 1998.