Topic 4 : Tores plats : obstruction votre Honneur !

Vincent Borrelli

May 24, 2011

1 L'idée fondamentale

Lemme 1.– *Soit $M^m \longrightarrow \mathbb{E}^n$ $(m < n)$ une sous-variété compacte C^2. Alors il existe un point $p \in M^m$ et un vecteur normal ξ_p tels que*

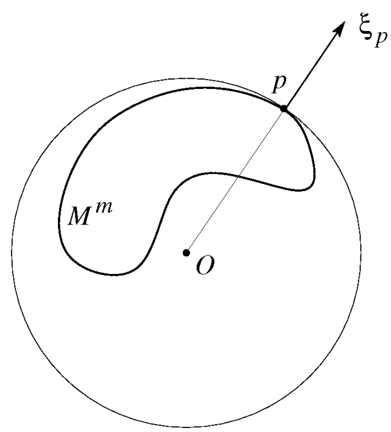
$$\forall X \in T_pM^m \setminus \{O\}, \quad \langle h_p(X,X), \xi_p \rangle < 0$$

où h est la seconde forme fondamentale de M^m.

Remarques.– 1) Bien sûr, en prenant $-\xi_p$ au lieu de ξ_p on change le sens de l'inégalité. Ce qui est important ici, c'est le fait que la seconde forme fondamentale ne s'annule pas sur la sphère unité de T_pM^m *i. e.* $\|h_p\| \neq 0$.

2) On peut remplacer l'hypothèse "sous-variété compacte" par "immersion isométrique d'une variété compacte". C'est très facile.

Démonstration.– Soient O l'origine de $\mathbb{E}^n$ et $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction $dist^2(O,.)$ restreinte à M^m. Puisque M^m est compacte, il existe au moins un point p réalisant le maximum absolu de f.



Au point p on a donc

$$\forall X \in T_pM^m, \quad df_p(X) = 0 \quad \text{et} \quad d^2f_p(X,X) \le 0.$$

Or

$$df_x(X) = 2\langle D_X x, x\rangle = 2\langle X, x\rangle$$

et donc $df_p = 0 \iff \langle X, p\rangle = 0$ *i. e.* $\overrightarrow{Op} \in N_pM^m$. On pose $\xi_p := \frac{\overrightarrow{Op}}{\|\overrightarrow{Op}\|}$. Soit $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \longrightarrow M^m$ une courbe telle que $\gamma(0) = p$ et $\gamma'(0) = X$. La composante de $\gamma''(0)$ le long de ξ_p est

$$\langle \gamma''(0), \xi_p\rangle = \langle h_p(\gamma'(0), \gamma'(0)), \xi_p\rangle$$

ainsi

$$\begin{aligned} 0 \ge \tfrac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t))|_{t=0} &= 2\tfrac{d}{dt}\left(\langle \gamma'(t), \gamma(t)\rangle\right)|_{t=0} \\ &= 2\langle \gamma''(0), \gamma(0)\rangle + 2\langle \gamma(0), \gamma(0)\rangle \\ &= 2\|\overrightarrow{Op}\|\langle h_p(X,X), \xi_p\rangle + 2\langle X, X\rangle \end{aligned}$$

et donc $\langle h_p(X,X), \xi_p\rangle \le -\frac{1}{\|\overrightarrow{Op}\|}\langle X, X\rangle$. □

Corollaire.– *Soit $f : M^{n-1} \longrightarrow \mathbb{E}^n$ une immersion isométrique C^2 d'une variété compacte. Alors il existe un point $p \in M^{n-1}$ en lequel toutes les courbures principales sont non nulles et ont même signe. En particulier, la courbure de Gauss en ce point est non nulle et elle est positive si $n-1$ est pair.*

Ainsi, il n'existe pas d'immersion isométrique de tores plats $\mathbb{E}^m/\Lambda$ dans $\mathbb{E}^{m+1}$. En fait, il n'existe pas non plus d'immersion isométrique de tore plats $\mathbb{E}^m/\Lambda$ dans $\mathbb{E}^{m+k}$ avec $2 \le k \le m-1$. Pour le voir, il faut creuser un peu l'argument précédent. C'est l'objet de la prochaine section qui est inspirée de [2].

2 Au delà des hypersurfaces

Lemme 2.– *Soient $h : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ une application bilinéaire symétrique et*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{S}^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & X & \longmapsto & \|h(X,X)\|. \end{array}$$

1) Si $X \in \mathbb{S}^{n-1}$ est un point critique de f alors pour tout $Y \in \mathbb{E}^n$ tel que $\langle X, Y\rangle = 0$ on a

$$\langle h(X,X), h(X,Y)\rangle = 0.$$

De plus, si $h(X,X) \neq 0$ alors

$$h(X,Y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle X, Y\rangle = 0.$$

2) Si $X \in \mathbb{S}^{n-1}$ est un minimum de f alors pour tout $Y \in \mathbb{S}^{n-1}$ tel que $\langle X, Y\rangle = 0$ on a

$$\langle h(X,X), h(Y,Y)\rangle + 2\langle h(X,Y), h(X,Y)\rangle \geq \langle h(X,X), h(X,X)\rangle.$$

Démonstration.– 1) Soit $H : \mathbb{E}^n \longrightarrow \mathbb{E}^k$ définie par $H(X) = h(X,X)$. On a

$$dH_X(Y) = h(X,Y) + h(Y,X)$$

et par conséquent

$$df_X(Y) := 2\langle h(X,Y), h(X,X)\rangle.$$

Par conséquent si $X \in \mathbb{S}^{n-1}$ est un point critique de f, on a

$$\langle h(X,X), h(X,Y)\rangle = 0$$

pour tous les $Y \in T_X\mathbb{S}^{n-1}$, c'est-à-dire tous les $Y \in \mathbb{E}^n$ tels que $\langle X, Y\rangle = 0$.

Supposons que $h(X,X) \neq 0$ et que $Y \in \mathbb{E}^n$ soit tel que $h(X,Y) = 0$. On décompose alors $Y = \lambda X + Y_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $Y_0 \in X^\perp$. On a

$$\begin{aligned} 0 &= \langle h(X,X), h(X,Y)\rangle \\ &= \langle h(X,X), h(X,\lambda X)\rangle + \langle h(X,X), h(X,Y_0)\rangle \end{aligned}$$

Puisque X est un point critique et que $\langle X, Y_0\rangle = 0$, on a nécessairement $\langle h(X,X), h(X,Y_0)\rangle = 0$ d'après ce que l'on vient de faire. Par conséquent $\lambda = 0$.

2) Soit $X \in \mathbb{S}^{n-1}$ un minimum de f, $Y \in \mathbb{S}^{n-1}$ tel que $\langle X, Y\rangle = 0$ et $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ une courbe définie par

$$\gamma(t) := \cos t\, X + \sin t\, Y.$$

Puisque X est un minimum de f on a

$$0 \leq \frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t))|_{t=0}.$$

Or

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 2\langle h(\gamma(t), \gamma(t)), h(\gamma(t), \gamma'(t)) \rangle$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t)) &= \quad 4\langle h(\gamma(t), \gamma'(t)), h(\gamma(t), \gamma'(t)) \rangle \\ &\quad +2\langle h(\gamma(t), \gamma(t)), h(\gamma'(t), \gamma'(t)) \rangle \\ &\quad +2\langle h(\gamma(t), \gamma(t)), h(\gamma(t), \gamma''(t)) \rangle \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t))|_{t=0} &= 4\langle h(X,Y), h(X,Y) \rangle + 2\langle h(X,X), h(Y,Y) \rangle \\ &\quad +2\langle h(X,X), h(X,-X) \rangle \end{aligned}$$

et finalement

$$2\langle h(X,Y), h(X,Y) \rangle + \langle h(X,X), h(Y,Y) \rangle \geq \langle h(X,X), h(X,X) \rangle.$$

$\square$

Proposition.– *Soit M^m une variété compacte ayant, en tout point, toutes ses courbures sectionnelles négatives ou nulles. Alors il n'existe pas d'immersion isométrique C^2 de M^m dans $\mathbb{E}^{m+k}$ avec $1 \leq k \leq m-1$.*

Remarques.– 1) En particulier, il n'existe pas d'immersion isométrique C^2 des tores plats $\mathbb{E}^m/\Lambda$ dans l'espace euclidien $\mathbb{E}^{2m-1}$.

2) Le théorème est optimal dans le sens suivant : il existe des plongements isométriques C^2 de variétés compactes plates. Par exemple, l'inclusion naturelle du tore carré $\mathbb{T}^m := \mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{C}^m$.

Démonstration.– Soit $f : M^m \longrightarrow \mathbb{E}^{m+k}$ une immersion isométrique et p un point qui réalise le maximum de la distance de O à $f(p)$. On pose $\xi_p := \frac{\overrightarrow{Op}}{\|\overrightarrow{Op}\|}$ et, d'après le lemme 1, pour tout $X \in T_pM^m \setminus \{O\}$ on a

$$\langle h(X,X), \xi_p \rangle \neq 0$$

et donc

$$\langle h(X,X), h(X,X)\rangle > 0$$

Soit $X_0 \in T_pM^m$ un vecteur réalisant le minimum de $X \longmapsto \|h(X,X)\|$ sur la sphère unité de T_pM^m. Notons que

$$\dim\{Y \in T_pM^m \mid h(X_0,Y)=0\} \geq m-k \geq 1.$$

Il existe donc un vecteur unitaire $Y_0 \in T_pM^m$ tel que $h(X_0,Y_0)=0$. D'après le point 1 du lemme 2, on a alors $\langle X_0,Y_0\rangle = 0$. L'équation de Gauss[1] s'écrit

$$Sec_{\mathbb{E}^{m+k}}(X_0,Y_0) = Sec_{M^m}(X_0,Y_0) + \langle h(X_0,Y_0), h(X_0,Y_0)\rangle - \langle h(X_0,X_0), h(Y_0,Y_0)\rangle$$

soit encore

$$-Sec_{M^m}(X_0,Y_0) = \langle h(X_0,Y_0), h(X_0,Y_0)\rangle - \langle h(X_0,X_0), h(Y_0,Y_0)\rangle.$$

Par hypothèse $-Sec_{M^m}(X_0,Y_0) \geq 0$ et puisque $h(X_0,Y_0)=0$ on a donc

$$0 \geq \langle h(X_0,X_0), h(Y_0,Y_0)\rangle.$$

D'après le point 2 du lemme 2, on a

$$\langle h(X_0,X_0), h(Y_0,Y_0)\rangle + 2\langle h(X_0,Y_0), h(X_0,Y_0)\rangle \geq \langle h(X_0,X_0), h(X_0,X_0)\rangle.$$

c'est-à-dire ici

$$\langle h(X_0,X_0), h(Y_0,Y_0)\rangle \geq \langle h(X_0,X_0), h(X_0,X_0)\rangle.$$

En cumulant les deux dernières inégalités, on obtient

$$0 \geq \langle h(X_0,X_0), h(X_0,X_0)\rangle$$

ce qui est en contradiction avec le fait que pour tout $X \in T_pM^m \setminus \{O\}$ on a $\langle h(X,X), h(X,X)\rangle > 0$. $\square$

[1] Rappelons la forme générale de cette équation

$$\tilde{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + \langle h(X,Z), h(Y,W)\rangle - \langle h(X,W), h(Y,Z)\rangle.$$

Rappelons également que la courbure sectionnelle d'un 2-plan engendré par (X,Y) orthonormé est $Sec(X,Y) = R(X,Y,Y,X)$.

3 La codimension m

Le résultat auquel on pense est le suivant : tout tore plat $\mathbb{E}^m/\Lambda$ admet un plongement isométrique C^∞ dans $\mathbb{E}^{2m}$ mais je n'ai pas trouvé de référence sauf pour $m = 2$.

Proposition (Pinkall, [1]).– *Tout tore plat $\mathbb{E}^2/\Lambda$ admet un plongement isométrique C^∞ dans $\mathbb{E}^4$.*

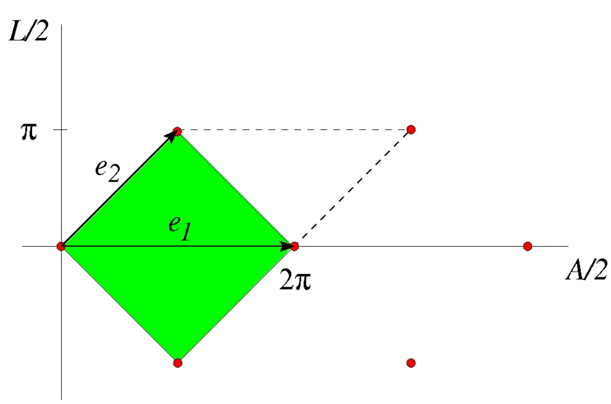
La démonstration se trouve dans [1]. Je ne donne ici que le procédé de construction. Soit $\pi : \mathbb{S}^3(1) \longrightarrow \mathbb{C}P^1 \simeq \mathbb{S}^2(1)$ une fibration de Hopf et $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2(1)$ une courbe régulière plongée de support Γ. On note T_Γ la pré-image $\pi^{-1}(\Gamma)$.

Définition.– Le tore pré-image T_Γ est appelé un *tore de Bianchi-Pinkall* ou parfois un *tore de Hopf* .

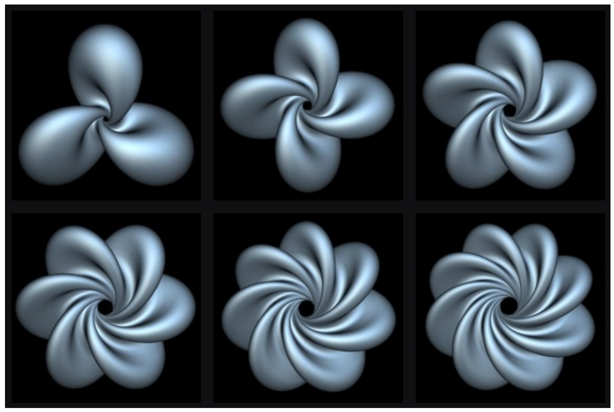
Notons L la longueur de Γ et $A \in \ [-2\pi, 2\pi[$ l'aire (signée) enclose par γ. Précisément, si c est une 2-chaîne de $\mathbb{S}^2(1)$ telle que $\partial c = \gamma$ alors $A = \int_c \omega$ où ω et la forme d'aire canonique de $\mathbb{S}^2(1)$. Notons que, quitte à changer l'orientation de γ, on peut supposer $A \in \ [0, 2\pi]$.

Proposition.– *Le tore T_Γ est isométrique au tore plat $\mathbb{E}^2/\Lambda$ où Λ est le réseau $\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ engendré par $e_1 := (2\pi, 0)$ et $e_2 := (\frac{A}{2}, \frac{L}{2})$.*

Remarque.– Si Γ est un grand cercle de $\mathbb{S}^2(1)$ alors $(A/2, L/2) = (\pi, \pi)$ et T_Γ est un tore carré.



L'image de ce tore après une projection stéréographique convenable est un tore de révolution de $\mathbb{E}^3$.

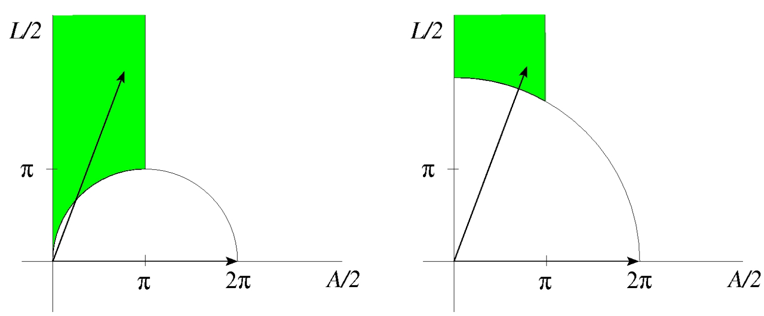


Quelques exemples d'images par la projection stéréographique de tores de Bianchi-Pinkall (illustrations tirées du site GeometrieWerkstatt).

L'inégalité isopérimétrique sur la sphère s'écrit

$$(A/2 - \pi)^2 + (L/2)^2 \geq \pi.$$

Les réseaux que l'on peut obtenir par la construction de Pinkall sont donc ceux engendrés par $(2\pi, 0)$ et un autre vecteur pointant dans la zone colorée ci-dessous à gauche :



A gauche : les réseaux que l'on peut obtenir par la construction de Pinkall. A droite : un domaine fondamental de l'espace des réseaux.

Cette zone couvre un domaine fondamental de l'espace des réseaux. Ainsi, tous les tores plats de dimension deux sont réalisés par la construction de Pinkall.

References

[1] U. Pinkall, *Hopf tori in* $\mathbb{S}^3$, Invent. Math. 81, 379-386 (1985).

[2] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish Inc., Boston, Mass., volume 5, 1975.