
La surface de Boy et la surface de Girl

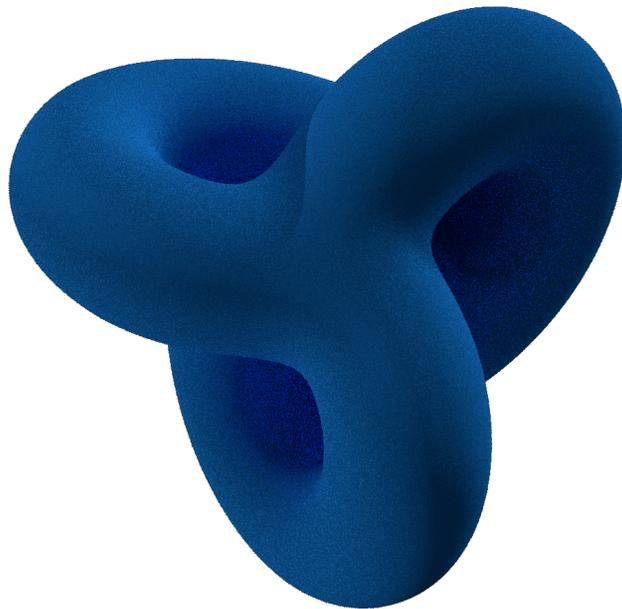


Table des matières

1	Introduction	3
2	Théorie homotopique des immersions	4
2.1	Immersion de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2	4
2.2	Classification des immersions	7
2.2.1	Le fibré des monomorphismes et le théorème de Hirsch	7
2.2.2	Exemple : les immersions de \mathbb{S}^3 dans \mathbb{E}^4	9
3	Du retournement de \mathbb{S}^2 aux immersions de $\mathbb{R}P^2$	10
3.1	Les immersions de $\mathbb{R}P^2$ dans \mathbb{R}^3	11
3.1.1	Quelques résultats sur les surfaces	12
3.1.2	La surface de Boy	12
3.1.3	La surface de Girl	13
3.2	Représentation de surfaces	14
3.2.1	Construction des surfaces	14
3.2.2	La surface de Boy	14
3.2.3	La surface de Girl	16
3.2.4	Existe-t-il d'autres immersions de $\mathbb{R}P^2$ dans \mathbb{E}^3 ?	17
4	Conclusion	18

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes qui ont contribué au développement de ce stage, et qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce rapport.

En premier lieu, j'aimerais remercier vivement mon maître de stage, Vincent Borrelli, maître de conférences à l'Université Claude Bernard Lyon 1, pour son accueil, son implication et son aide. Grâce à sa pédagogie et sa patience, j'ai pu apercevoir un aspect des mathématiques qui m'était jusqu'alors inconnu. Il fut d'une aide précieuse dans les moments les plus délicats, et un excellent professeur lorsque cela fut nécessaire.

De plus j'adresse mes remerciements à mes professeurs de géométries de l'École Normale Supérieure de Lyon Jean-Claude Sikorav et Marco Mazzucchelli, qui m'ont beaucoup aidé dans ma recherche de stage et m'ont enseigné les connaissances nécessaires pour y postuler. Leur écoute et leurs conseils m'ont permis de trouver ce stage qui était en totale adéquation avec mes attentes.

Je remercie également toute l'équipe de l'Institut Camille Jordan pour son accueil, leur bonne humeur, et en particulier Régis Goiffon et Nathan Pagès, la qualité de leurs discussions mathématiques n'ayant d'égal que leur jovialité.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont conseillé et relu lors de la rédaction de ce rapport de stage, en particulier Maëlys, pour qui la concordance des temps et les erreurs de style n'ont aucun secret.

1 Introduction

Le but initial de ce stage était l'étude de l'article *Girl's Surface* par Sue Goodman, Alex Mellnik et Carlo H. Séquin [GMS13], qui présente les analogies et met en lumière les différences entre deux immersions non homéomorphes du plan projectif réel dans l'espace euclidien de dimension trois. Il a donc été question de comprendre l'aspect de la surface de Girl, à l'aide de l'outil informatique et de modélisation tridimensionnelle. Cette surface, peu connue de la communauté mathématique, a été exposée pour la première fois par François Apéry dans *Models of the Real Projective Plane* en 1987, et n'a pourtant pas fait l'objet de recherche pendant plus de vingt ans. Ce n'est donc que récemment que cette surface a été de nouveau analysée. Ce rapport de stage s'inscrit dans la continuité de ces travaux-là, dont l'enjeu a été de comprendre et de représenter visuellement, de la manière la plus parlante possible, un objet géométrique complexe.

L'étude de cet article a ensuite conduit à celle des immersions des surfaces en dimension trois, et plus généralement à celles des variétés dans les espaces euclidiens, qui présentent des propriétés intéressantes.

Ce rapport illustre dans un premier temps certains aspects de la théorie homotopique des immersions, avant de se concentrer sur les immersions de surfaces, en particulier celles du plan projectif réel. C'est dans ce cadre qu'interviennent les surfaces de Boy et de Girl, dont nous détaillerons des propriétés, ainsi que quelques représentations réalisées grâce à l'outil graphique.

2 Théorie homotopique des immersions

2.1 Point de départ : les immersions de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2

Nous allons analyser les immersions du cercle dans le plan, qui sont exactement les manières les plus simples de voir les courbes fermées comme des « sous-variétés de dimension 1 à auto-intersections » du plan.

Définition. On dit que $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, une application \mathcal{C}^1 , est une immersion du cercle dans le plan, si

$$\forall s \in \mathbb{S}^1, f'(s) \neq 0, \text{ où } f'(s) := df(s) \cdot 1$$

On note $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des immersions du cercle dans le plan.

Exemple 1. En identifiant $[s] \in \mathbb{S}^1$ avec $s \in [0; 1[$, les applications i et \bar{i} définies par

$$i : \begin{cases} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ [s] & \longmapsto & (\cos(2\pi \cdot s), \sin(2\pi \cdot s)) \end{cases} \quad \text{et} \quad \bar{i} : \begin{cases} \mathbb{S}^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ [s] & \longmapsto & (\cos(2\pi \cdot s), -\sin(2\pi \cdot s)) \end{cases}$$

sont des immersions du cercle dans le plan.

On se demande alors s'il est possible de classer les différentes immersions du cercle dans le plan. Pour cela, on munit $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ de la topologie \mathcal{C}^1 et on regarde ses différentes composantes connexes par arcs.

Définition. Deux immersions du cercle dans le plan f_0 et f_1 sont dites *régulièrement homotopes* s'il existe une application $H : \mathbb{S}^1 \times [0; 1] \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathbb{R}^2$ vérifiant :

- $f_0 = H(\cdot, 0)$
- $f_1 = H(\cdot, 1)$
- $\forall t \in [0; 1], f_t : s \mapsto H(s, t)$ est une immersion du cercle dans le plan

L'application H est appelée *homotopie régulière* entre f_0 et f_1 .

Remarque. La relation « être régulièrement homotopes » est une relation d'équivalence sur $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ qui coïncide avec la relation d'équivalence « être dans la même composante connexe par arcs pour la topologie \mathcal{C}^1 ».

Classifier les différentes immersions du cercle à homotopie régulière près, c'est donc chercher à connaître $\pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2))$, l'ensemble des composantes connexes des immersions du cercle dans \mathbb{R}^2 . Par exemple, i et \bar{i} sont-elles régulièrement homotopes ? La réponse est non, et pour cela, nous allons devoir trouver un invariant d'homotopie régulière qui permettra de les distinguer.

Considérons les applications

$$\partial : \begin{cases} I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \text{Map}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \\ f & \longmapsto & f' \end{cases} \quad \text{et} \quad N : \begin{cases} \text{Map}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ g & \longmapsto & N(g, 0) \end{cases}$$

où $\text{Map}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ désigne les applications continues du cercle dans le plan épointé, sans condition de différentiabilité, et muni de la topologie de la convergence uniforme, et $N(g, 0)$ désigne le nombre de tours algébrique que fait le support de g par rapport à l'origine¹. Ces applications sont clairement continues, et on peut considérer leur composition

1. Plus précisément, $N(\gamma, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$ est continue à valeurs entières et vaut exactement le nombre de tours (algébrique) que fait γ autour de z_0 dans le plan complexe \mathbb{C} . Pour plus de détails, voir [Kra99].

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Ind} & \\
 & \curvearrowright & \\
 I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) & \xrightarrow{\partial} \text{Map}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) & \xrightarrow{N} \mathbb{Z} \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & & \text{Ind}
 \end{array}$$

qui est toujours continue. En particulier, \mathbb{Z} étant discret, Ind est constante sur chaque composante connexe de $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$:

$$\forall f_0, f_1 \in I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2), f_0 \text{ et } f_1 \text{ sont régulièrement homotopes} \Rightarrow \text{Ind}(f_0) = \text{Ind}(f_1)$$

Ind est donc un invariant d'homotopie régulière, et pour f une immersion de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2 , on appelle $\text{Ind}(f)$ l'indice de f .

Exemple 2. $\text{Ind}(i) = 1$ tandis que $\text{Ind}(\bar{i}) = -1$. En particulier, i et \bar{i} ne sont pas régulièrement homotopes. On dit que le *retournement du cercle* est impossible dans \mathbb{R}^2 .

En tant qu'invariant d'homotopie régulière, l'application Ind passe au quotient et donne lieu à une application

$$\text{Ind} : \left| \begin{array}{l} \pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) \rightarrow \mathbb{Z} \\ [f] \mapsto N \circ \partial(f) \end{array} \right.$$

Proposition. L'application Ind est surjective.

Avant de donner une démonstration, observons qu'un simple dessin permet de se convaincre de la surjectivité de l'application : comme représenté sur la figure 1, on voit qu'un cercle bouclé $(k - 1)$ fois et parcouru dans le sens direct (respectivement indirect) possède un indice k (respectivement $-k$).

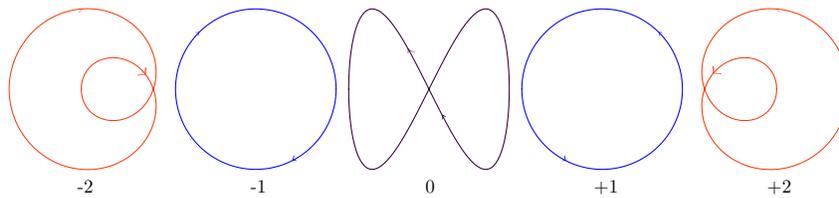


FIGURE 1 – Représentation de différentes immersions de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2 , d'indice respectif indiqué

Démonstration. Considérons les applications suivantes, où $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$i_0 : \left| \begin{array}{l} \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ [s] \mapsto (\cos(\pi \cdot s), \sin(2\pi \cdot s)) \end{array} \right. \text{ et } i_k : \left| \begin{array}{l} \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ [s] \mapsto (\cos(2k\pi \cdot s), \sin(2k\pi \cdot s)) \end{array} \right.$$

Il est alors facile de montrer que $\forall k \in \mathbb{Z}, i_k$ est une immersion de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2 vérifiant $\text{Ind}(i_k) = k$. □

Théorème 1 (Whitney - Graustein, 1937). *L'application Ind est bijective.*

Démonstration. Brièvement, il suffit de prouver qu'une reparamétrisation par abscisse curviligne peut se faire de manière régulièrement homotope, ce qui est laissé au lecteur. Cela étant fait, on a impliqué une rétraction de la dérivée f' de l'immersion f sur le cercle \mathbb{S}^1 .

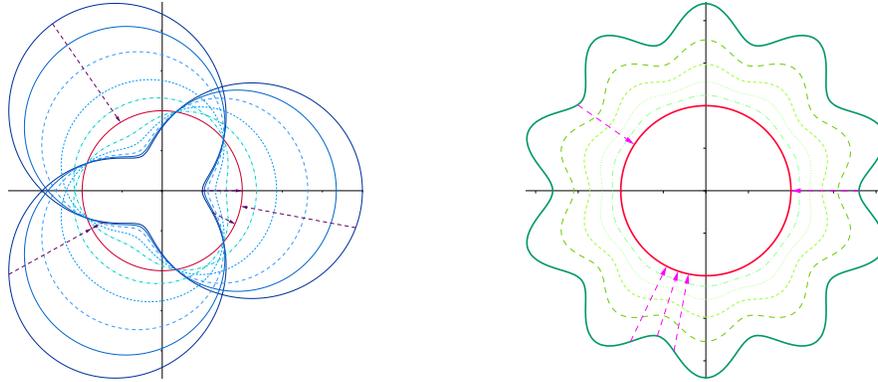


FIGURE 2 – Rétraction de f' sur le cercle

De là, soient f et g telles que $\text{Ind}(f) = \text{Ind}(g)$. D'après ce qu'on a vu plus haut, on peut supposer que $\forall s \in \mathbb{S}^1, \|f'(s)\| = \|g'(s)\| = 1$. D'après un résultat de topologie algébrique, les lacets f' et g' sont homotopes. Soit h une homotopie entre ces lacets. Considérons donc

$$H : \begin{cases} \mathbb{S}^1 \times [0;1] & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ([s], t) & \longmapsto \int_0^s h(u, t) du - sV_t \end{cases} \quad \text{où } V_t = \int_0^1 h(u, t) du$$

Comme l'intégration se fait sur le cercle qui est strictement convexe, V_t est dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de \mathbb{S}^1 : elle ne peut se trouver sur le cercle. La translation de la dérivée par $-V_t$ assure donc que celle-ci ne s'annule pas. Il s'agit donc bien d'une homotopie régulière, et Ind est donc injective. La surjectivité ayant déjà été montrée, on a bien montré le théorème. \square

En conclusion, nous avons déterminé que l'ensemble des courbes fermées \mathcal{C}^1 régulières du plan était, à homotopie régulière près, en bijection naturelle avec \mathbb{Z} . La philosophie de cette démonstration est que, par oubli de la structure différentielle du problème, et en ne se focalisant que sur la topologie d'un espace naturellement associé, on dispose de suffisamment d'informations pour le résoudre.

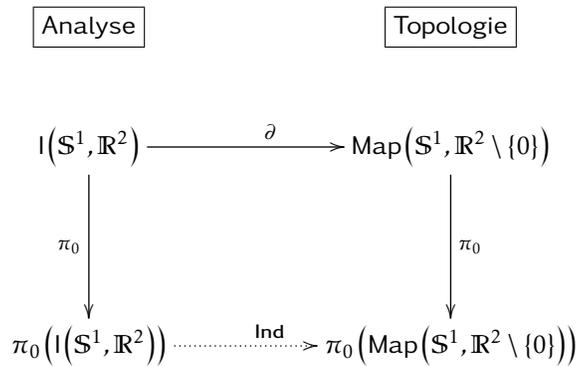


FIGURE 3 – Schéma de la classification des immersions de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2

2.2 Classification des immersions de variétés réelles dans les espaces euclidiens

Sur le modèle de la classification des immersions du cercle, nous nous demandons s'il est possible de généraliser le résultat précédent aux variétés de plus grande dimension : combien existe-t-il, à homotopie régulière près, d'immersions de $\mathbb{R}P^n$ dans certaines variétés ? Peut-on retourner la sphère ?

Définition. On dit que $f : \mathcal{M}^m \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathcal{N}^n$ est une immersion, et on note $f : \mathcal{M}^m \hookrightarrow \mathcal{N}^n$ si

$$\forall x \in \mathcal{M}^m, df(x) : T_x \mathcal{M}^m \longrightarrow T_{f(x)} \mathcal{N}^n$$

est une application linéaire de rang m , ou de manière équivalente, si elle est injective.

On note $I(\mathcal{M}^m, \mathcal{N}^n)$ l'ensemble des immersions de \mathcal{M}^m dans \mathcal{N}^n , muni de la topologie \mathcal{C}^1 , et on notera $\pi_0(I(\mathcal{M}^m, \mathcal{N}^n))$ l'ensemble de ses composantes connexes.

Définition. Deux immersions $f_0 : \mathcal{M}^m \hookrightarrow \mathcal{N}^n$ et $f_1 : \mathcal{M}^m \hookrightarrow \mathcal{N}^n$ sont dites *régulièrement homotopes* s'il existe une application $H : \mathcal{M}^m \times [0; 1] \xrightarrow{\mathcal{C}^1} \mathcal{N}^n$ vérifiant :

- $f_0 = H(\cdot, 0)$
- $f_1 = H(\cdot, 1)$
- $\forall t \in [0; 1], f_t : x \mapsto H(x, t)$ est une immersion

L'application H est appelée *homotopie régulière* entre f_0 et f_1 .

Proposition. $f_0 : \mathcal{M}^m \hookrightarrow \mathcal{N}^n$ et $f_1 : \mathcal{M}^m \hookrightarrow \mathcal{N}^n$ sont régulièrement homotopes si et seulement si f_0 et f_1 sont dans la même composante connexe de $I(\mathcal{M}^m, \mathcal{N}^n)$.

Dans la suite de l'étude, nous ne nous intéresserons qu'aux immersions de variétés fermées (compactes, sans bord) dans les espaces euclidiens $f : \mathcal{M}^m \hookrightarrow \mathbb{E}^N$. La condition différentielle qu'est l'immersivité des applications impose la relation $m \leq N$ ². Cependant, cette condition n'est pas suffisante.

Il n'est pas évident que $I(\mathcal{M}^m, \mathbb{E}^N)$ ne soit pas vide dans le cas général. C'était même une question posée par David Hilbert à son étudiant doctorant Werner Boy : existe-t-il une immersion du plan projectif réel dans l'espace euclidien à trois dimensions ?³

2.2.1 Le fibré des monomorphismes et le théorème de Hirsch

Soit $f : \mathcal{M}^m \hookrightarrow \mathbb{E}^N$ une immersion. Par définition d'une immersion, on dispose d'une application

$$df : \begin{cases} T\mathcal{M}^m & \longrightarrow & T\mathbb{E}^N \\ (x, v) & \longmapsto & (f(x), df(x) \cdot v) \end{cases}$$

telle que $\forall x \in \mathcal{M}^m, df(x)$ est injective. Comme dans l'étude des immersions du cercle dans le plan, on se rend compte que l'application *différentielle* définie sur l'espace des immersions de \mathcal{M}^m dans \mathbb{E}^N est à valeurs dans un sous-espace particulier des morphismes de fibrés vectoriels $F : T\mathcal{M}^m \longrightarrow T\mathbb{E}^N$. C'est ce sous-espace particulier qui va nous intéresser.

Définition. Une application $\Phi : T\mathcal{M}^m \longrightarrow T\mathbb{E}^N$ vérifiant

$$\forall x \in \mathcal{M}^m, \Phi(x) : T_x \mathcal{M}^m \longrightarrow \mathbb{E}^N \text{ est linéaire de rang } m$$

est appelé un monomorphisme.

On note $\text{Mono}(\mathcal{M}^m, \mathbb{E}^N)$ l'ensemble des monomorphismes de \mathcal{M}^m dans \mathbb{E}^N . En notant $\mathcal{L}_{\text{inj}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^N)$ l'ensemble des applications linéaires injectives de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^N , on obtient un fibré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{\text{inj}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^N) & \hookrightarrow & \text{Mono}(\mathcal{M}^m, \mathbb{E}^N) \\ & & \downarrow \\ & & \mathcal{M}^m \end{array}$$

2. C'est dû au théorème du rang.

3. La réponse est oui, contrairement à ce que pensait Hilbert, et Boy l'a montré en exhibant la célèbre *surface de Boy*, voir 3.2.2.

qu'on appellera fibré des monomorphismes, que l'on notera également $\text{Mono}(\mathcal{M}^m, \mathbb{E}^N)$ par abus de langage.

Remarque. Une immersion $f : \mathcal{M}^m \hookrightarrow \mathbb{E}^N$ définit une section globale du fibré des monomorphismes. En effet, pour tout x dans \mathcal{M}^m , $df(x)$ est une application linéaire injective de la fibre $T_x \mathcal{M}^m$ dans la fibre $T_{f(x)} \mathbb{E}^N$.

D'après la remarque précédente, on dispose d'une application naturelle

$$\partial : \begin{array}{ccc} I(\mathcal{M}^m, \mathbb{E}^N) & \longrightarrow & \Gamma(\text{Mono}(\mathcal{M}^m, \mathbb{E}^N)) \\ f & \longmapsto & df \end{array}$$

qui est une obstruction à l'existence d'immersions de \mathbb{M}^m dans \mathbb{E}^N : s'il n'existe pas de section globale du fibré des monomorphismes, il est impossible d'immerger \mathcal{M}^m dans \mathbb{E}^N ⁴.

En s'inspirant de l'étude des immersions de \mathbb{S}^1 dans \mathbb{R}^2 , on considère le diagramme suivant :

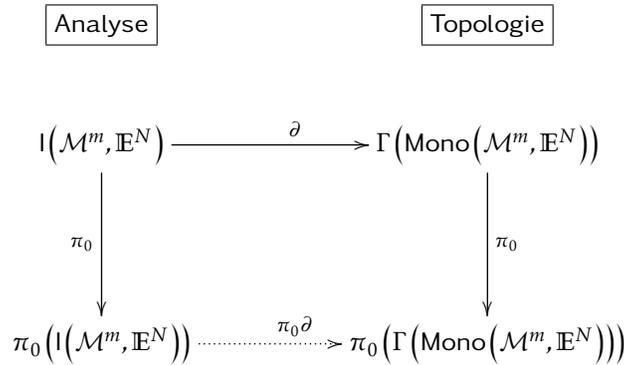


FIGURE 4 – Schéma de la tentative d'une classification des immersions de \mathcal{M}^m dans \mathbb{E}^N

On a réussi, sous condition de trouver une application $\pi_0 \partial$ suffisamment intéressante, à se ramener à un problème de topologie. De plus, parfois, par des arguments de théorie homotopique, l'étude de $\pi_0(\Gamma(\text{Mono}(\mathcal{M}^m, \mathbb{E}^N)))$ se ramène en réalité à l'étude d'un certain groupe fondamental. Il n'y a donc plus aucune notion rigide comme la différentiabilité qui s'interpose dans l'étude du problème. Cependant, le calcul de ce dernier ensemble peut s'avérer très compliqué, voire actuellement non résolu.

Théorème 2 (Hirsch, admis). ∂ est une équivalence d'homotopie faible ⁵ entre les espaces topologiques $I(\mathcal{M}^m, \mathbb{E}^N)$ et $\Gamma(\text{Mono}(\mathcal{M}^m, \mathbb{E}^N))$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \pi_n(I(\mathcal{M}^m, \mathbb{E}^N)) \simeq \pi_n(\Gamma(\text{Mono}(\mathcal{M}^m, \mathbb{E}^N)))$$

Pour $n = 0$ il s'agit d'une bijection ensembliste. Pour $n > 0$, on dispose d'un isomorphisme de groupes.

Ce puissant théorème permet donc, au cas par cas, de guider la classification des immersions des variétés réelles dans les espaces euclidiens.

4. Un résultat plus fort, dû à Hirsch, montre même qu'il existe une immersion de \mathcal{M}^m dans \mathbb{E}^N si et seulement si il existe une section globale du fibré des monomorphismes. C'est le début de la théorie du *h-principe*, développée par Gromov.

5. Deux espaces topologiques X et Y sont dits homotopiquement équivalents si il existe deux applications continues $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ vérifiant $f \circ g \sim \text{Id}_Y$ et $g \circ f \sim \text{Id}_X$. Sous ces conditions, f et g sont appelées des équivalences d'homotopie. Deux espaces topologiques homotopiquement équivalents sont faiblement homotopiquement équivalents, mais la réciproque est fautive. Par exemple, [le cercle polonais](#) est un espace topologique dont tous les groupes d'homotopies sont triviaux, mais qui n'est pas contractile, c'est-à-dire qui n'est pas homotope à un singleton.

2.2.2 Exemple : les immersions de \mathbb{S}^3 dans \mathbb{E}^4

Dans la suite de l'étude, les bases de la théorie des revêtements sont considérées comme connues. Pour des rappels de topologie algébrique, voir par exemple [DD05]. De même, les notions de fibré tangent et de fibré trivial seront supposées acquises du lecteur.

Dans cette section, on considère la sphère \mathbb{S}^3 plongée dans \mathbb{E}^4 , identifié au corps non commutatif des quaternions $\mathbb{H} = \text{vect}_{\mathbb{R}}(1, i, j, k)$ ⁶, muni du produit scalaire $\langle q_1; q_2 \rangle = \text{Re}(q_1 \bar{q}_2)$, où \bar{q} représente le conjugué de q . Le but de la section est d'illustrer une application du théorème de Hirsch.

Proposition. Soit $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$. Alors $\left(\frac{q}{\|q\|}, i \frac{q}{\|q\|}, j \frac{q}{\|q\|}, k \frac{q}{\|q\|} \right)$ est une base orthonormée de \mathbb{H} .

Démonstration. Puisque $(1, i, j, k)$ est une base orthonormée, il suffit d'utiliser la linéarité du produit scalaire. \square

Corollaire. La sphère \mathbb{S}^3 est parallélisable, c'est à dire que son fibré tangent est trivial.

Démonstration. L'application $t : \begin{cases} T\mathbb{S}^3 & \longrightarrow \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ (q, v) & \longmapsto (q, \langle iq, v \rangle, \langle jq, v \rangle, \langle kq, v \rangle) \end{cases}$, où $v \in T_q \mathbb{S}^3 = q^\perp \subset \mathbb{H}$, trivialise le fibré tangent de \mathbb{S}^3 . \square

D'un point de vue homotopique, il en ressort simplement que l'étude de $\Gamma(\text{Mono}(T\mathbb{S}^3, T\mathbb{E}^4))$ revient à celle de $\Gamma(\text{Mono}(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{E}^4 \times \mathbb{R}^4))$. Soit donc $\Phi \in \Gamma(\text{Mono}(\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3, \mathbb{E}^4 \times \mathbb{R}^4))$:

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{E}^3 \times \mathbb{R}^3 \\ (q, v) & \longmapsto (q, d\Phi(q) \cdot v) \end{cases}$$

Par injectivité et linéarité, $d\Phi(q)$ est entièrement déterminée par l'image de la base (iq, jq, kq) , qui forme une famille libre de trois vecteurs de \mathbb{R}^4 . De plus, \mathbb{E}^3 étant contractile, tout se passe d'un point de vue homotopique comme si l'image de q par Φ n'importait pas. Enfin, la donnée d'une famille de trois vecteurs libres de \mathbb{R}^4 est, homotopiquement parlant, équivalente à celle d'une base orthonormée directe de \mathbb{R}^4 , par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. En effet, il est clair que ce procédé rend équivalente la donnée d'une famille libre de trois vecteurs indépendants à celle d'une famille de trois vecteurs orthonormés. En outre, pour chaque famille orthonormée de trois vecteurs, il existe un unique vecteur unitaire de \mathbb{R}^4 complétant cette famille en base orthonormée directe, d'où le résultat.

Finalement, on a montré :

$$\Gamma(\text{Mono}(T\mathbb{S}^3, T\mathbb{E}^4)) \simeq \text{Map}(\mathbb{S}^3, SO(4))$$

En particulier, considérer $\pi_0(\Gamma(\text{Mono}(T\mathbb{S}^3, T\mathbb{E}^4)))$ revient à considérer l'ensemble des composantes connexes par arcs de l'ensemble des applications continues de \mathbb{S}^3 dans $SO(4)$, c'est-à-dire $\pi_3(SO(4))$, le troisième groupe d'homotopie de $SO(4)$:

$$\pi_0(\Gamma(\text{Mono}(T\mathbb{S}^3, T\mathbb{E}^4))) \simeq \pi_3(SO(4))$$

De plus, d'un point de vue topologique, $SO(4)$ et $\mathbb{S}^3 \times SO(3)$ sont identiques : une base orthonormée de \mathbb{R}^4 est en effet la donnée d'un vecteur unitaire $q \in \mathbb{S}^3$ et d'une base orthonormée de l'espace tangent $T_q \mathbb{S}^3 = q^\perp$, donc d'un élément de $SO(3)$. D'où :

$$\pi_0(\Gamma(\text{Mono}(T\mathbb{S}^3, T\mathbb{E}^4))) \simeq \pi_3(\mathbb{S}^3) \times \pi_3(SO(3))$$

Puisque trivialement, $\pi_3(\mathbb{S}^3) = \mathbb{Z}$, il suffit de calculer $\pi_3(SO(3))$.

Proposition. $\pi_3(SO(3)) = \mathbb{Z}$.

6. Le produit est défini par la célèbre formule de Hamilton $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

3 DU RETOURNEMENT DE \mathbb{S}^2 AUX IMMERSIONS DE $\mathbb{R}P^2$

Lemme. \mathbb{S}^3 est un revêtement à deux feuillets de $SO(3)$: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{S}^3$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{S}^3 \\ & & \downarrow p \\ & & SO(3) \end{array}$$

Démonstration de la proposition. En utilisant le lemme, lorsque l'on considère une application continue $\phi : \mathbb{S}^3 \xrightarrow{C^0} SO(3)$, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{S}^3 & \\ & \downarrow p & \\ \mathbb{S}^3 & \xrightarrow{\phi} & SO(3) \end{array}$$

D'après le théorème de relèvement pour un revêtement (voir [DD05]), ϕ se relève en une unique application $\bar{\phi} : \mathbb{S}^3 \xrightarrow{C^0} \mathbb{S}^3$:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{S}^3 & \\ & \downarrow p & \\ \mathbb{S}^3 & \xrightarrow{\phi} & SO(3) \end{array}$$

$\bar{\phi}$ (dotted arrow from \mathbb{S}^3 to \mathbb{S}^3)

D'où $\pi_3(SO(3)) = \pi_3(\mathbb{S}^3)$, ce dernier ensemble étant simplement \mathbb{Z} ⁷. □

Démonstration du lemme. Brièvement : on note \mathbb{H}^* l'ensemble des quaternions non nuls, et $\text{Im}(\mathbb{H}^*)$ l'ensemble des quaternions. Soit $\psi : \begin{cases} \mathbb{H}^* & \longrightarrow & \text{Aut}(\text{Im}\mathbb{H}^*) \\ q & \longmapsto & (u \mapsto qu\bar{q}) \end{cases}$ que l'on restreint à \mathbb{S}^3 en $\phi|_{\mathbb{S}^3} : \mathbb{S}^3 \longrightarrow SO(\text{Im}\mathbb{H}^*)$. C'est un morphisme de groupe, surjectif, de noyau $\{+1; -1\}$. Une propriété bien connue des quaternions est que $SO(\text{Im}\mathbb{H}^*) = SO(3)$. On en déduit que $SO(\text{Im}\mathbb{H}^*) = SO(3) = \mathbb{R}P^3$, dont \mathbb{S}^3 est bien un revêtement à deux feuillets. □

En conclusion, et d'après le théorème de Hirsch, on a montré que l'ensemble des immersions de \mathbb{S}^3 dans \mathbb{E}^4 était, à homotopies régulières près, en bijection avec $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

3 Du retournement de \mathbb{S}^2 aux immersions de $\mathbb{R}P^2$

Considérons $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ qui est une sous-variété de dimension 2. On peut donc considérer son inclusion canonique $i : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ et son opposée $-i$ qui sont donc des plongements et en particulier des immersions. S'il existe une homotopie régulière H entre i et $-i$, on dit que l'éversion (ou le retournement) de la sphère est possible, et que H réalise cette éversion.

Proposition. $\pi_0(I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3))$ est un singleton.

Ébauche de démonstration. On aimerait reproduire le modèle de la démonstration du cas de $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{E}^4$. Cependant, \mathbb{S}^2 n'est pas parallélisable... On utilise alors une astuce appelée le *micro-extension trick* (illustré

7. Plus généralement, $\forall k, n \in \mathbb{N}^*, \pi_k(\mathbb{S}^n) = \{0\}$ si $k < n$, \mathbb{Z} si $k = n$.

en figure 5) : en considérant, pour $0 < \varepsilon < 1$, la sphère épaissie $\mathbb{S}^2 \times]-\varepsilon; \varepsilon[\hookrightarrow \mathbb{E}^3$, qui est un ouvert de \mathbb{E}^3 , donc parallélisable, on établit une démonstration semblable : on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{S}^3 \\ & \nearrow & \downarrow p \\ \mathbb{S}^2 \times]-\varepsilon; \varepsilon[& \longrightarrow & SO(3) \end{array}$$

D'où $\pi_0(\text{Im}(\mathbb{S}^2 \times]-\varepsilon; \varepsilon[, \mathbb{E}^3)) \simeq \pi_2(SO(3)) = \pi_2(\mathbb{S}^3) = \{0\}$.

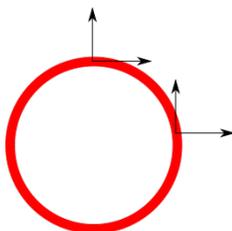


FIGURE 5 – *Micro-extension trick* sur le cercle : $\mathbb{S}^1 \times]-\varepsilon; \varepsilon[$ est trivialement parallélisable

En particulier, comme $\mathbb{S}^2 \times]-\varepsilon; \varepsilon[$ et \mathbb{S}^2 sont homotopiquement équivalents, et on a bien que l'ensemble $\pi_0(\text{Im}(\mathbb{S}^2, \mathbb{E}^3))$ est un singleton. \square

Corollaire. *Le retournement de la sphère est possible.*

La visualisation effective du retournement de la sphère fut longtemps une question ouverte. Certains retournements sont reliés à ceux de l'espace projectif réel dans \mathbb{E}^3 :

Définition. On appelle plan projectif réel, que l'on note $\mathbb{R}P^2$, l'ensemble $\mathbb{S}^2 /_{x \sim -x}$ muni de la topologie quotient. Il s'agit d'une variété fermée de dimension 2, non orientable, connexe.

Remarque. D'un point de vue ensembliste, $\mathbb{R}P^2$ est l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{E}^3 .

Proposition. Le revêtement universel du plan projectif réel est donné par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \hookrightarrow & \mathbb{S}^2 \\ & & \downarrow p \\ & & \mathbb{R}P^2 \end{array}$$

Il s'agit d'un revêtement à deux feuillets où p est la projection canonique.

Démonstration. En effet, \mathbb{S}^2 est simplement connexe, et est bien un revêtement de $\mathbb{R}P^2$. Par la théorie des revêtements, c'est bien un revêtement universel (voir [DD05]). \square

On a donc, à chaque immersion du plan projectif réel, une immersion de la sphère qui lui correspond, par la théorie des revêtements. En particulier, certaines immersions du plan projectif réel ont joué un rôle central dans les premières versions du retournement de la sphère.

3.1 Les immersions de $\mathbb{R}P^2$ dans \mathbb{R}^3

Le but de cette section est de développer certains aspects de l'article [GMS13], présentant la surface de Girl, en analogie avec la surface de Boy. La célèbre surface de Boy intervient lors de la visualisation du retournement de la sphère. La surface de Girl est, quant à elle, bien moins connue, car difficilement visualisable et présentant très peu de symétries.

3.1.1 Quelques résultats sur les surfaces

La notion de caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface et d'un CW-complexe seront supposées connues du lecteur. On pourra se référer à [Pau09].

Définition (Banchoff, [Ban73]). On dit d'une immersion $f : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{E}^3$ d'une 2-variété \mathcal{M} fermée qu'elle est en position générale si les seules auto-intersections sont soit des courbes de points doubles le long desquelles la surface se recoupe transversalement, soit des points triples isolés en lesquels $f(\mathcal{M})$ possède trois plans tangents deux à deux indépendants.

Théorème 3 (Banchoff, admis). *Le nombre de points triples d'une immersion d'une 2-variété fermée \mathcal{M} dans \mathbb{E}^3 , en position générale, est congru à $\chi(\mathcal{M})$ modulo 2.*

Pour une démonstration de ce théorème, se référer à [Ban73].

Corollaire. *Comme $\chi(\mathbb{R}P^2) = 1$, toute immersion de $\mathbb{R}P^2$ dans \mathbb{E}^3 possède un point triple au moins.*

Théorème 4 (Izumiya et Marar, admis). *Soit $f : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{E}^3$ une immersion en position générale. Soit $T(f)$ l'ensemble des points triples de $f(\mathcal{M})$. Alors*

$$\chi(f(\mathcal{M})) = \chi(\mathcal{M}) + \#T(f)$$

Pour une démonstration de ce théorème, se référer à [IM93].

Corollaire. *Une immersion lisse en position générale $f : \mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \mathbb{E}^3$ vérifie $\chi(f(\mathbb{R}P^2)) = 2k$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.*

3.1.2 La surface de Boy

La surface de Boy présente une grande symétrie : cette propriété en fait l'immersion de $\mathbb{R}P^2$ dans \mathbb{E}^3 la plus célèbre. Elle est non orientable, et présente un ensemble de points multiples homéomorphe à un bouquet de trois cercles. Elle peut être vue comme une sphère dont on a recollé deux à deux les points antipodaux, ou bien comme un ruban de Möbius dont on a recollé un disque sur le bord.

On distingue la surface de Boy **droite** de la surface de Boy **gauche** par la manière dont on peut y plonger des rubans de Möbius : dans le premier cas, on peut y plonger un ruban de Möbius dit droit (par exemple, la bande dite équatoriale, voire figure 6) tandis que dans le second cas, ce ruban de Möbius sera dit gauche. En effet, le cardinal de l'ensemble des immersions de la bande de Möbius à homotopie régulière près vaut 2 ; on choisit donc arbitrairement l'un des deux comme étant droit, et l'autre sera dit gauche.

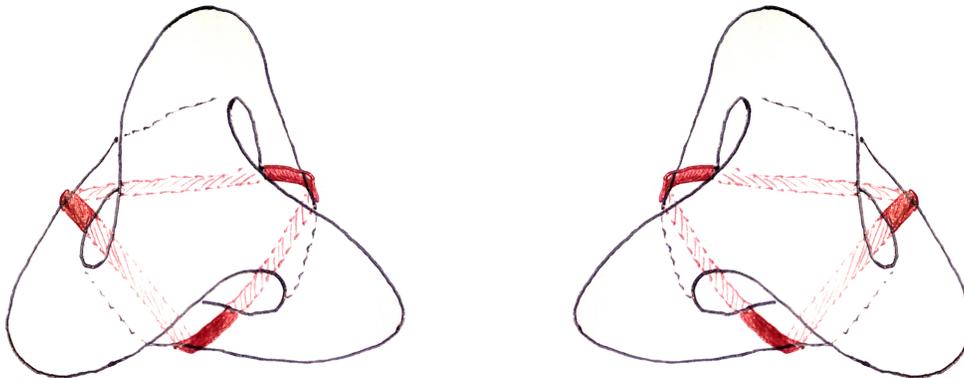


FIGURE 6 – Bandes équatoriales de la Surface de Boy droite et de la surface de Boy gauche

3.1.3 La surface de Girl

La surface de Girl était connue de François Apéry, mais est restée inconnue de la communauté mathématique pendant très longtemps. C'est ainsi que l'article [GMS13] a tenté d'en expliquer quelques propriétés très différentes de celles de la surface de Boy.



FIGURE 7 – Dessin de la surface de Girl gauche

Tout d'abord, cette surface, puisque c'est une immersion du plan projectif réel, n'est pas orientable, est compacte sans bord, et connexe. De même que pour la surface de Boy, l'ensemble de ses points multiples est homéomorphe à un bouquet de trois cercles. Elle est très difficile à visualiser graphiquement du fait de son manque de symétrie : l'article [GMS13] a notamment pour but d'en représenter graphiquement les propriétés géométriques.

Tout comme pour la surface de Boy, on distingue la surface de Girl droite et la surface de Girl gauche (voir figure 7) en fonction des rubans de Möbius que l'on y plonge. Cependant, repérer un tel plongement est visuellement très difficile.

La surface de Girl droite (respectivement gauche) est régulièrement homotope à la surface de Boy droite (respectivement gauche) : cette homotopie est représentée graphiquement en figure 3 dans [GMS13], nous en détaillerons le procédé dans les modélisations tridimensionnelles en 3.2. Cependant, la surface de Boy et la surface de Girl ne sont pas homéomorphes. En effet, l'ensemble des points multiples sur la surface de Boy délimitent trois disques ouverts sur la surface. Ce n'est pas le cas de la surface de Girl. Hors, un homéomorphisme conservant les propriétés topologiques comme celle-ci, ces deux surfaces ne peuvent donc pas être homéomorphes.

De même que pour la surface de Boy, la surface de Girl gauche et l'image par une réflexion de la surface de Girl droite.

3.2 Représentation de surfaces

Cette section a pour but d'illustrer la construction des deux dernières surfaces : en effet, il est très difficile de visualiser ces immersions de $\mathbb{R}P^2$ « dans leur ensemble », et il est plus aisé de les construire par étape afin d'en comprendre la structure. L'ensemble des images suivantes, sauf la dernière, sont issues de modélisations tridimensionnelles effectuées par l'auteur à l'aide du logiciel libre [Blender](#), ou d'une représentation en origami, également effectuée par l'auteur. Elles ont été réalisées « à la main », sans paramétrisation des surfaces. Les représentations ci-dessous sont constructives et suivent un procédé décrit [[GMS13](#)].

3.2.1 Construction des surfaces

Nous voulons représenter graphiquement des immersions du plan projectif en trois dimensions : il est donc nécessaire, d'après la section [3.1.1](#), que ces immersions :

- possèdent au moins un point triple
- aient une caractéristique d'Euler-Poincaré paire, non nulle

Afin de minimiser la complexité de ces immersions, il semble naturel de tenter de minimiser ces paramètres et de modéliser des surfaces ayant un unique point triple, et une caractéristique d'Euler-Poincaré égale à 2.

Il faut donc partir d'un point triple : sans perte de généralité, considérons un point triple où les plans tangents sont deux à deux orthogonaux.

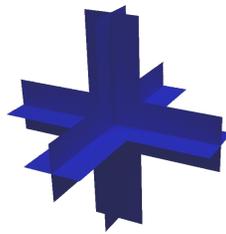


FIGURE 8 – Point triple

Dès la localisation de ce point triple, on voit apparaître une partie de l'ensemble des points doubles de la surface considérée. C'est la manière de raccorder ces points doubles, afin de rendre l'ensemble des points multiples connexe, qui caractérisera la construction de l'immersion.

3.2.2 La surface de Boy

Pour la surface de Boy, on « boucle » les brins du point triple afin de former trois hanches, de manière symétrique.

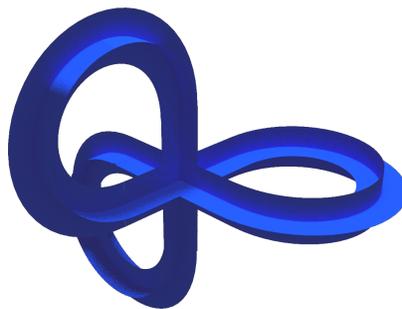


FIGURE 9 – Point triple bouclé

Désormais, l'objet construit possède un bord composé de quatre cercles disjoints, dont trois sont facilement discernables au sein des boucles. Le dernier cercle n'est autre que la partie « extérieure » du bord, qui contourne les boucles. Le plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$ étant une surface fermée, afin de le représenter par immersion, il faut faire disparaître le bord introduit. On commence donc par boucher les trois cercles facilement discernables par des disques, comme représenté en figure 10.

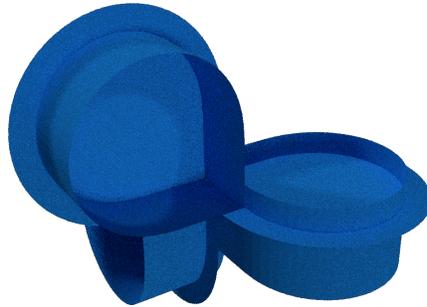


FIGURE 10 – Point triple bouclé et « capé »

Le bord de la surface ici créée étant un cercle, on va essayer de « le boucher » afin d'obtenir une possible immersion du plan projectif. Pour conserver un maximum de symétrie, on va procéder de manière méthodique en extrudant trois arcs du bord de manière à réduire ce bord et voir apparaître le cercle à combler. Cette étape de construction est représentée par la figure 11.

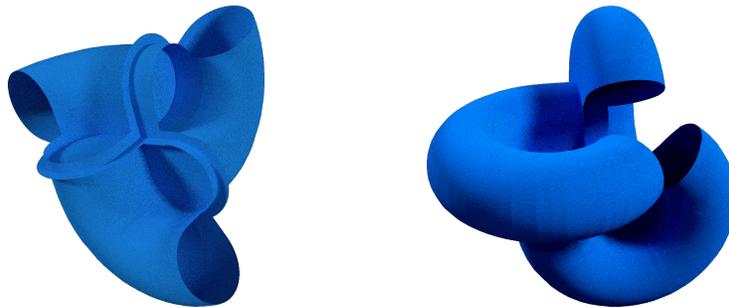


FIGURE 11 – Fermeture du bord

Il ne reste plus qu'à fermer la surface afin de voir apparaître la surface de Boy.

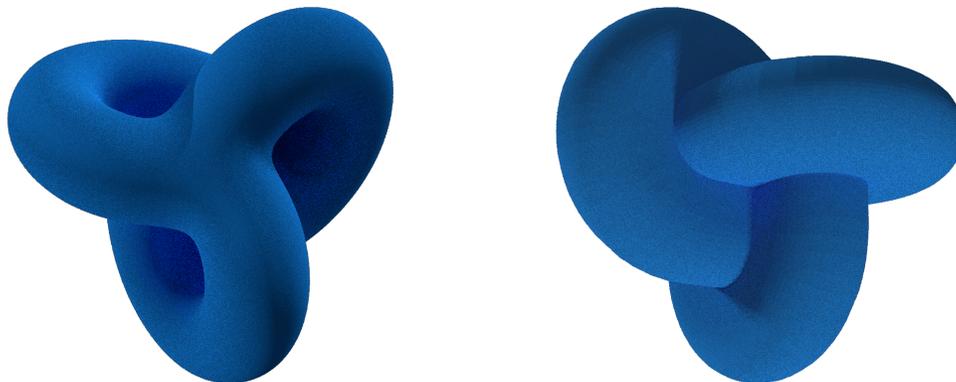


FIGURE 12 – Surface de Boy

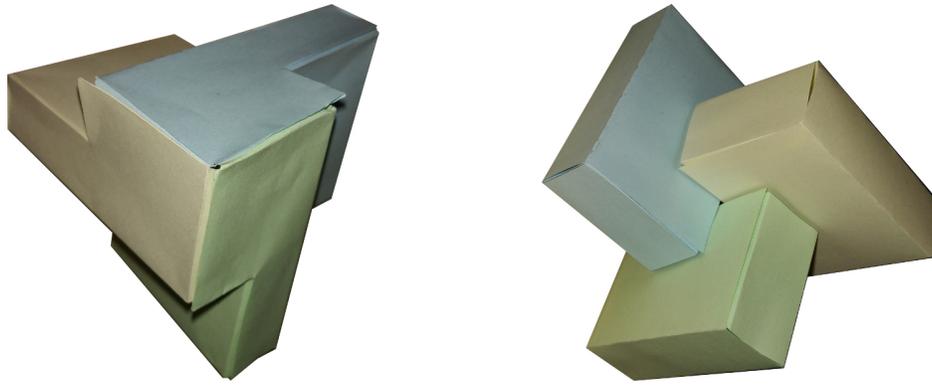


FIGURE 13 – Surface de Boy en origami

Cette construction est bien en adéquation avec les contraintes imposées par la section 3.1.1. Tout d'abord, il y a bien un seul point triple. De plus, l'ensemble des points multiples constitue un graphe dont le seul sommet est le point triple, possédant trois arêtes (les composantes connexes de l'ensemble des points doubles), et délimitant quatre disques sur la surface. Ainsi, on a bien $\chi(\text{Surface de Boy}) = 1 - 3 + 4 = 2$, comme prévu.

3.2.3 La surface de Girl

Afin de construire la surface de Girl, sur le modèle proposé par [GMS13], le procédé utilisé lors de la construction de la surface de Boy est à nouveau appliqué pour les premières étapes : il s'agit, pour les mêmes raisons, de partir d'un point triple auquel on va raccorder les brins et combler les vides par des disques. La différence notable vient de la manière de raccorder les brins du point triple.

En effet, l'un des brins est raccorderé en ajoutant une rotation de 180 degrés, comme sur la figure 14, ce qui brise la symétrie de la surface. Ainsi, le bord ici présent n'est plus composé de trois simples cercles et d'un grand cercle extérieur comme pour la surface de Boy, mais de deux cercles simples et deux cercles extérieurs plus complexes.

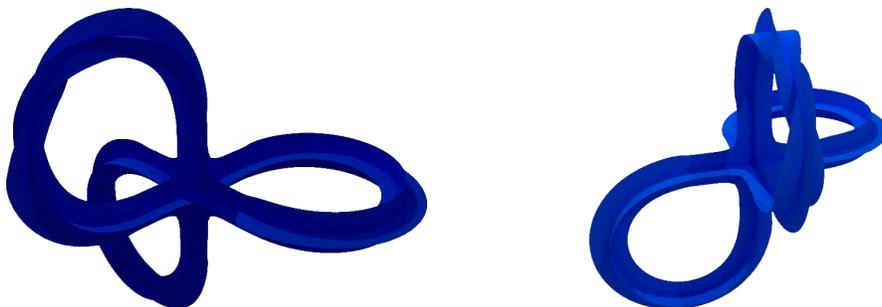


FIGURE 14 – Construction de la surface de girl

Il devient plus difficile de combler ces deux derniers cercles par des disques, et l'on se retrouve ainsi avec la surface de la figure 15.

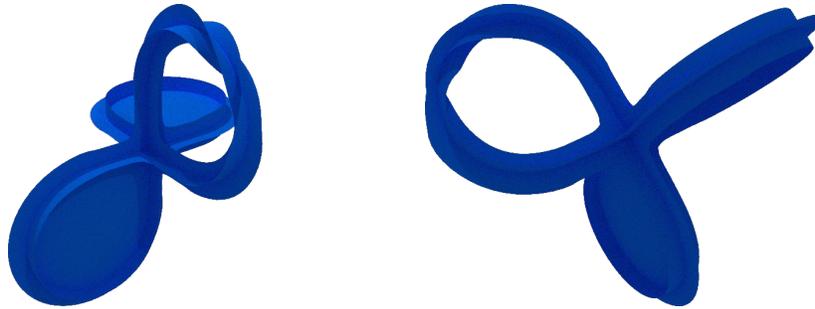


FIGURE 15 – Construction de la surface de Girl

Le logiciel [Blender](#) s'est par la suite révélé inexploitable pour terminer la modélisation de la surface de Girl dans le temps imparti par le stage. Le procédé est cependant le suivant : la hanse restante de la surface construire doit être déformée et rabattue vers les hanches qui ont été bouchées afin de réduire les bords de la surface. De là apparaîtront des cercles qu'il faut boucher à nouveau. Voici néanmoins une visualisation finale de ce que devrait être la surface de Girl, due à [Carlo H. Séquin](#).



FIGURE 16 – Impression 3D de la surface de Girl par Carlo H. Séquin

Cette construction est toujours en accord avec la section [3.1.1](#), avec les mêmes observations.

3.2.4 Existe-t-il d'autres immersions de $\mathbb{R}P^2$ dans \mathbb{E}^3 ?

Il est naturel de se demander s'il existe d'autres immersions du plan projectif réel dans l'espace possédant un unique point triple et un ensemble connexe de points multiples. Sans considérer les images par des réflexions des deux dernières, il n'en existe pas : en effet, la connexité de l'ensemble des points multiples, et le caractère sans bord d'une telle immersion, imposent de relier les différents brins issus du point triple entre eux. Il y a donc un nombre fini de combinaisons possibles, incluant des raccords entre eux des brins et des rotations des hanches différentes. Cependant, chacune de ces autres combinaisons ne permet pas d'avoir une caractéristique d'Euler paire et entre donc en contradiction avec le théorème d'Izumiya et Marar. Cette dernière affirmation ne nécessitant que des tests successifs, elle ne sera pas prouvée ici.

4 Conclusion

Au cours de ce rapport, nous nous sommes intéressés à la théorie homotopique des immersions, le but étant de mieux appréhender mathématiquement la surface de Girl. Après avoir revu les fondements de cette théorie, nous nous sommes concentrés sur le cas particulier de la sphère et du plan projectif réel. Les immersions de ce plan projectif réel formaient déjà le sujet de thèse de doctorat de Werner Boy en 1901, qui s'est concentré sur la surface qui porte aujourd'hui son nom, alors qu'il a fallu attendre 1987, puis 2013 afin qu'une seconde immersion aux propriétés semblables de cette variété soit explicitée.

Dans la continuité de ce champ de recherche, ce rapport entreprenait au départ d'apporter une meilleure vision de la surface de Boy, mais aussi de celle de Girl, visuellement plus complexe ; cependant, l'utilisation du logiciel libre [Blender](#) n'a pas permis, dans le temps imparti du stage, d'atteindre complètement cet objectif concernant la seconde. L'utilisation de logiciels plus performants pour ce genre de modélisation, ou bien la recherche d'une paramétrisation effective de cette surface, dans des travaux ultérieurs, permettrait de pallier ce problème, et plus largement, d'apporter d'avantage de visualisation concrète en géométrie.

Références

- [Ape87] Francois APERY : *Models of the Real Projective Plane*. 1987.
- [Ban73] Thomas F. BANCHOFF : Triple points and surgery of immersed surfaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 46:407–413, 1973.
- [DD05] Adrien DOUADY et Régine DOUADY : *Algèbre et théories galoisiennes*. Cassini, 2005.
- [GK09] Sue GOODMAN et Marek KASSOWSKI : Immersions of the projective plane with one triple point. *Differential Geometry and its Applications*, 118, 2009.
- [GMS13] Sue GOODMAN, Alex MELLNIK et Carlo H. SÉQUIN : Girl’s surface. *In Bridges Conf*, 2013.
- [HVS07] Paulo HENRIQUE, Renato F.V. VIANNA et Northrup SCOTT : Self intersections in immersions of the projective plane. 2007.
- [IM93] S IzUMIYA et W.L. MARAR : The euler characteristic of a generic wavefront in a 3-manifold. *Proceedings of the American Mathematical Society*, pages 1347–1350, 1993.
- [KC89] Ki Hyung KO et J. Scott CARTER : Triple points of immersed surfaces in three dimensional manifold. *Topology and its Applications*, 32:149–159, 1989.
- [Kra99] S.G. KRANTZ. *In BOSTON, éditeur : Handbook of Complex Variables*, chapitre The Index or Winding Number of a Curve about a Point, pages 49–50. 1999.
- [Pau09] Frédéric PAULIN : *Topologie algébrique élémentaire*. 2009.
- [Pin85] Ulrich PINKALL : Regular homotopy classes of immersed surfaces. *Topology*, pages 421–434, 1985.
- [Poe62] Valentin POENARU : Sur la théorie des immersions. *Topology*, 1:81–100, 1962.
- [Sma57] Stephen SMALE : A classification of immersions of the two-sphere. *In Transactions of the American Mathematical Society*. 1957.

Table des figures

1	Représentation de différentes immersions de S^1 dans \mathbb{R}^2 , d’indice respectif indiqué	5
2	Rétraction de f' sur le cercle	6
3	Schéma de la classification des immersions de S^1 dans \mathbb{R}^2	6
4	Schéma de la tentative d’une classification des immersions de \mathcal{M}^m dans \mathbb{E}^N	8
5	<i>Micro-extension trick</i> sur le cercle : $S^1 \times]-\varepsilon; \varepsilon[$ est trivialement parallélisable	11
6	Bandes équatoriales de la Surface de Boy droite et de la surface de Boy gauche	12
7	Dessin de la surface de Girl gauche	13
8	Point triple	14
9	Point triple bouclé	14
10	Point triple bouclé et « capé »	15
11	Fermeture du bord	15
12	Surface de Boy	15
13	Surface de Boy en origami	16
14	Construction de la surface de girl	16
15	Construction de la surface de Girl	17
16	Impression 3D de la surface de Girl par Carlo H. Séquin	17