



INSTITUT CAMILLE JORDAN

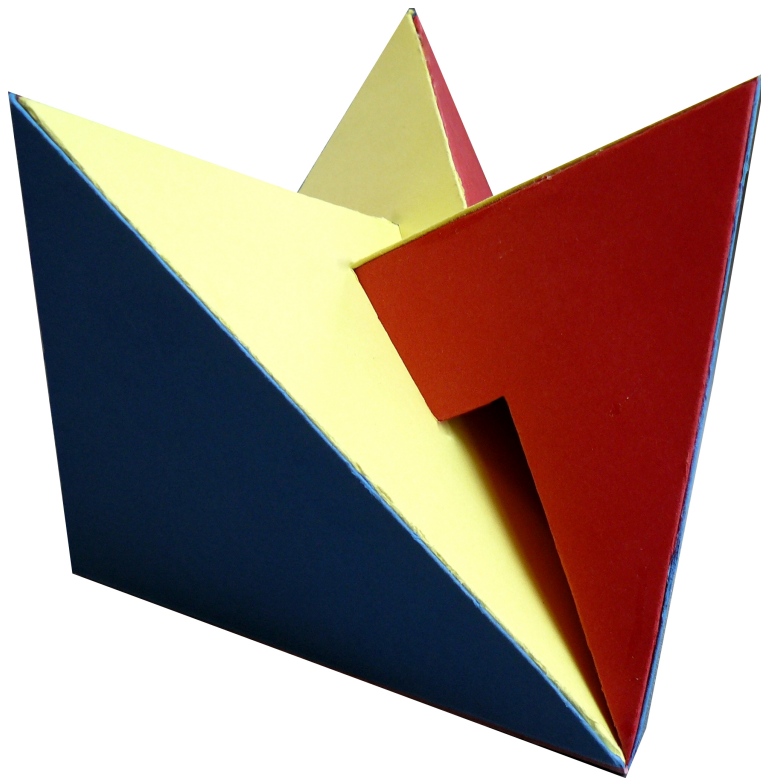
---

# Surface de Boy et polyèdre de Brehm

---

*Auteur :*  
Laura GAY

*Responsable :*  
Vincent BORRELLI





## Introduction

L'objectif de ce stage était l'étude de l'article *Versions polyédriques du retournement de la sphère* de Richard Denner [1] dans le but de comprendre et de réaliser un modèle polyédrique 3D de la surface de BOY : le polyèdre de BREHM.

La surface de BOY est une immersion de l'espace projectif  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ . Elle a été découverte en 1901 par Werner BOY [2] alors qu'il était étudiant en thèse sous la direction de David HILBERT. Elle est composée d'un ruban de Möbius comportant trois demi-torsions et d'un disque. Elle fait apparaître une courbe d'auto-intersection et un point triple.



FIGURE 1: Une surface de BOY,

Source : Dusan ZIVALJEVIC

Par sa simplicité, le modèle polyédrique de BREHM permet de se faire une bonne idée de la conformation dans l'espace de la surface de BOY.

Ce rapport débute avec des notions topologiques (recolllements, topologie quotient) puis présente l'espace projectif  $\mathbb{R}P^2$ , l'immersion de BOY et le modèle polyédrique de Brehm.

Je remercie infiniment mon maître de stage, Vincent Borrelli, pour tout ce qu'il a pu m'apprendre durant ce mois, tant au niveau du savoir mathématiques que la réflexion constante sur le monde qu'elles amènent. Je tiens à remercier également Régis Goiffon, chargé de la diffusion des mathématiques au sein de l'ICJ, qui m'a permis une fois encore de réaliser à quel point est importante cette diffusion et m'a donné vraiment l'envie de m'investir dans ce type de projets. Mes remerciements s'adressent aussi à Francis Lazarus qui m'a fait prendre en main Inkscape et Kenji Iohara pour m'avoir fascinée par la science des origamis.

# 1 Topologie quotient et recollement

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques,  $X_0 \subset X$  et  $\varphi : X_0 \rightarrow Y$ . On note  $\sim$  la relation d'équivalence sur  $X \sqcup Y$  définie par

$$z_1 \sim z_2 \text{ ssi } \begin{cases} z_1 = z_2 \\ \text{ou} \\ z_2 \in X_0 \text{ et } z_1 = \varphi(z_2) \\ \text{ou} \\ z_1 \in X_0 \text{ et } z_2 = \varphi(z_1). \end{cases}$$

**Définition 1** L'espace  $(X \sqcup Y)/\sim$  est appelé *recollement* de  $X$  à  $Y$  par  $\varphi$  et il est noté  $X \cup_{\varphi} Y$ . Il est muni de la topologie quotient.

Rappelons que, pour la topologie quotient, un ensemble  $U \in X/\sim$  est un *ouvert* si  $\pi^{-1}(U)$  est un ouvert de  $X$ , où  $\pi$  est la projection naturelle  $X \rightarrow X/\sim$ .

## Exemples

- Soient  $X = D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$ ;  $X_0 = \partial D^2 = S^1$ ;  $Y = \{point\}$  et  $\varphi : X_0 \rightarrow \{point\}$  l'application constante, alors  $X \cup_{\varphi} Y$  est la sphère  $S^2$ .

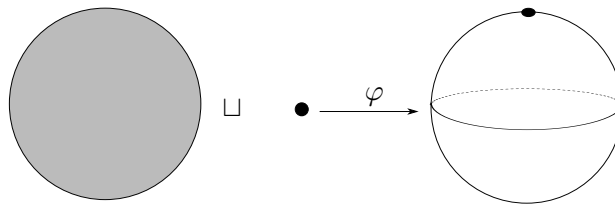


FIGURE 2: Recollement du bord d'un disque sur un point

- Soient  $X = D^2$ ;  $X_0 = \partial D^2 = S^1$ ;  $Y = D^2$  et  $\varphi = \text{Id}_{\partial D^2}$ , alors  $X \cup_{\varphi} Y = S^2$ .

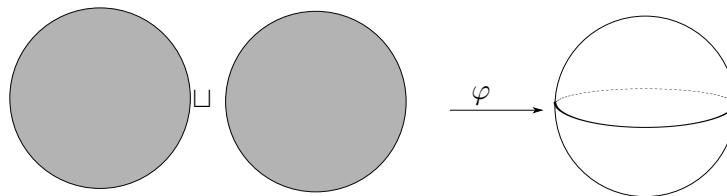


FIGURE 3: Recollement de deux disques selon leur bord



## 2 Espaces projectifs et rubans de Möbius

### 2.1 Le ruban de Möbius

On considère sur l'espace produit  $S^1 \times \mathbb{R}$ , la relation d'équivalence suivante :

$$(\theta_1, x_1) \sim (\theta_2, x_2) \text{ ssi } \begin{cases} (\theta_2, x_2) = (\theta_1, x_1) \\ \text{ou} \\ \exists k \in \mathbb{Z} / (\theta_2, x_2) = (\theta_1 + (2k + 1)\pi, -x_1). \end{cases}$$

**Définition 2** L'espace quotient  $(S^1 \times \mathbb{R}) / \sim$  est appelé le *ruban de Möbius*. Il est noté  $\mathbb{M}^2$  et il est muni de la topologie quotient.

**Définition 3** L'espace  $(S^1 \times \{0\}) / \sim \subset S^1 \times \mathbb{R} / \sim$  est appelé l'*âme* du ruban de Möbius. Les sous-espaces  $\{\theta\} \times \mathbb{R} / \sim$  sont appelés les *fibres*.

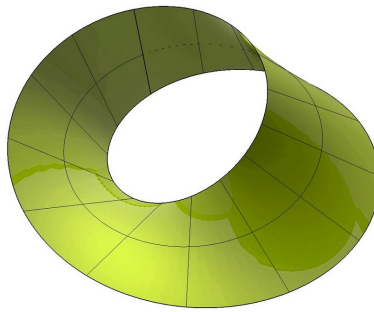


FIGURE 4: Un ruban de Möbius avec son âme et ses fibres,

Source : <http://www.craftsmanspace.com>

**Proposition 1** Le ruban de Möbius s'identifie à l'ensemble  $\mathcal{D}$  des droites affines du plan.

**Démonstration** Soit  $z$  un point de  $S^1 \subset \mathbb{C}$  et  $x$  un élément de  $\mathbb{R}$ . On définit une application  $\Psi$  en posant :

$$\begin{aligned} \Psi : S^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{D} \\ (z, x) &\longmapsto D_{z,x} \end{aligned}$$

où  $D_{z,x}$  est la droite affine dont une équation paramétrique est

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\longmapsto uz + ixz. \end{aligned}$$

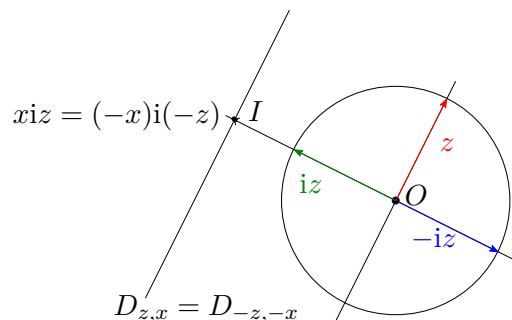


FIGURE 5: Droites du plan

Montrons que  $\Psi$  est surjective. Soit  $O$  un point du plan et  $D \in \mathcal{D}$ ,  $z$  un vecteur directeur unitaire de  $D$ . Soit  $D^\perp = \{izu/u \in \mathbb{R}\}$ , la droite perpendiculaire à  $D$  passant par le point  $O$ . On note  $I$  l'intersection de  $D$  et  $D^\perp$  et  $x$  l'unique réel tel que  $I=izx$ . Ainsi  $D$  est la droite d'équation paramétrique  $u \rightarrow uz + ixz$  et, par suite,  $\Psi(z, x) = D$ . L'application  $\Psi$  n'est pas injective. Précisément, si  $D \in \mathcal{D}$  est telle que  $D = D_{z,x}$ , alors on a  $\Psi^{-1}(D) = \{(z, x); (-z, -x)\}$ .

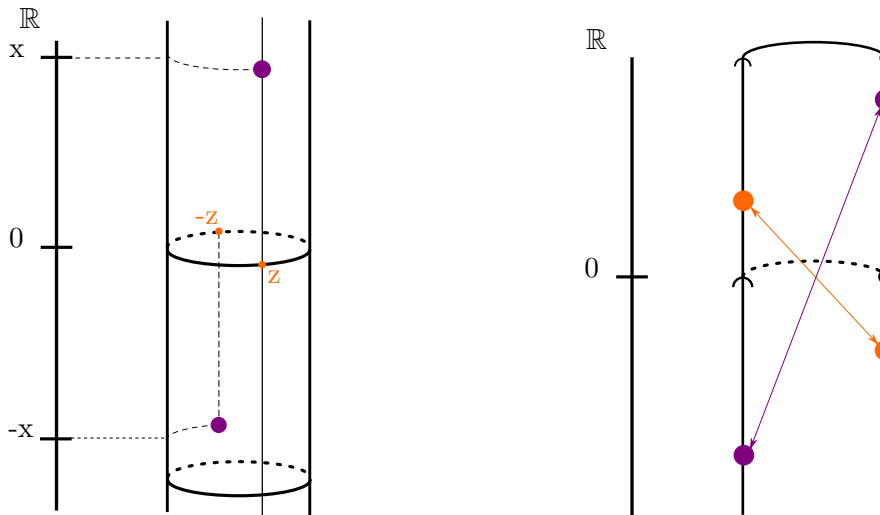


FIGURE 6: Espace quotient

Il s'en suit que l'application induite  $\tilde{\Psi} : (S^1 \times \mathbb{R})/\sim \rightarrow \mathcal{D}$  est bijective. □

## 2.2 Espaces projectifs

On considère sur la sphère unité  $S^n$  de  $\mathbb{E}^{n+1}$  la relation d'équivalence  $\sim$  suivante :

$$x \sim y \iff x = \pm y \text{ (relation d'antipodie)}$$

**Définition 4** L'espace quotient  $S^n/\sim$  muni de la topologie quotient est appelé l'espace projectif de dimension  $n$  et il est noté  $\mathbb{R}P^n$ .

On note  $\pi$  la projection naturelle  $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ .

**Proposition 2** L'espace  $\mathbb{R}P^n$  s'identifie à l'ensemble  $\mathcal{D}_0$  des droites de  $\mathbb{E}^{n+1}$  passant par l'origine.

**Démonstration :** En effet, il est facile de vérifier que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}P^n &\longrightarrow \mathcal{D}_0 \\ [x] &\longrightarrow D_x := \text{la droite de vecteur directeur } x \end{aligned}$$

est bijective. □

**Lemme 1** L'espace  $\mathbb{R}P^1$  est homéomorphe à  $S^1$

**Démonstration :** On considère l'application  $g : S^1/\sim \rightarrow S^1$  et  $h : S^1 \rightarrow S^1$

$$[e^{i\theta}] \mapsto e^{2i\theta} \quad e^{i\theta} \longrightarrow e^{2i\theta}$$

L'application  $g$  est bien définie car  $\forall k \in \mathbb{Z}, g([e^{i\theta}]) = g([e^{i(\theta+\pi)}])$  et on a le diagramme commutatif

suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & & \\
 \pi \downarrow & \searrow h & \\
 S^1 / \sim & \xrightarrow{g} & S^1
 \end{array}$$

Montrons que  $g$  est bijective. La surjectivité est claire. Pour l'injectivité, si  $e^{i\theta} = e^{i\phi}$  alors  $\theta \equiv \phi [2\pi]$  i.e.  $[e^{i\theta}] = [e^{i\phi}]$ .

Montrons que  $g$  est un homéomorphisme. Tout d'abord,  $g$  est continue. En effet, par définition de la topologie quotient,  $g$  est continue si et seulement si  $h$  est continue. Or la continuité de  $h$  est évidente, donc  $g$  est continue. Une application bijective continue d'un espace compact dans un espace séparé est un homéomorphisme. Par conséquent,  $g$  est un homéomorphisme. ( $S^1 / \sim$  est compact car c'est l'image d'un compact par l'application  $\pi$  qui est continue).  $\square$

Soit  $\sim$  la relation d'équivalence définie sur le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ ssi } \begin{cases} x_1 = x_2 \text{ et } y_1 = y_2 \\ \text{ou} \\ x_1 = 0; x_2 = 1 \text{ et } y_1 = 1 - y_2 \\ \text{ou} \\ x_1 = 1; x_2 = 0 \text{ et } y_1 = 1 - y_2. \end{cases}$$

Il est bien connu que l'espace quotient  $[0, 1]^2 / \sim$  est homéomorphe au ruban de Möbius, nous ne le démontrerons pas ici. On considère l'application

$$\begin{aligned}
 \varphi : \partial\mathbb{M}^2 &\longrightarrow S^1 \\
 (x, 0) &\longmapsto e^{i\pi x} \\
 (x, 1) &\longmapsto e^{i\pi(x+1)}
 \end{aligned}$$

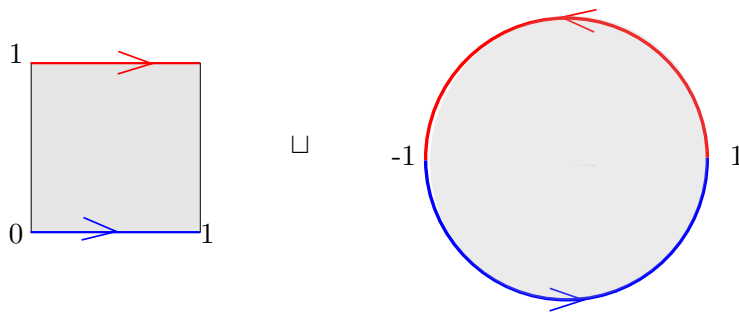
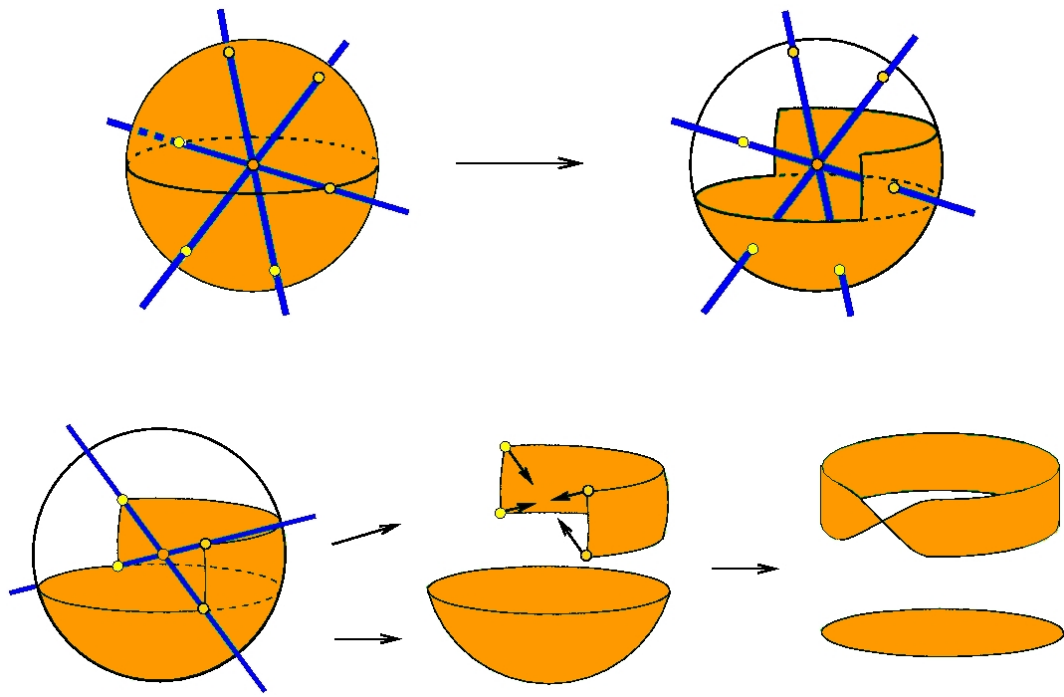


FIGURE 7: Recollement d'un ruban de Möbius et d'un disque le long de leurs bords

**Lemme 2** On a  $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{M}^2 \cup_{\varphi} D^2$ .

**Idée de la démonstration** Elle est entièrement contenue dans la suite de figures ci-dessous.



□

### 3 Immersions et plongements

Dans ce paragraphe, on considère que toutes les applications sont  $C^\infty$ .

#### 3.1 Immersions

**Définition 5** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $m \geq n$ . Une application  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une *immersion* (ou *paramétrisation régulière*) si pour tout  $P \in U$ , on a  $\text{rg}(df_P) = n$ .

**Observation** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $S^{n-1}$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  une immersion. Alors, pour tout  $P \in S^{n-1}$ , on a  $\dim(df_P(T_P S^{n-1})) = n - 1$ . Par extension, on dit que  $f|_{S^{n-1}}$  réalise une *immersion de  $S^{n-1}$  dans  $\mathbb{R}^m$* . Si de plus  $f(-x) = f(x)$ ,  $f$  passe au quotient sur  $\mathbb{R}P^{n-1}$  et on dit que l'application quotient  $\bar{f} : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une *immersion de  $\mathbb{R}P^{n-1}$  dans  $\mathbb{R}^m$* .

**Exemple : Le plongement de Véronèse** Soit

$$f : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (x, y, z) \longmapsto (x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx).$$

Nous allons montrer que  $f$  induit une immersion de  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^6$ . La jacobienne de  $f$  a pour expression

$$\text{Jac } f|_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \\ y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{pmatrix}.$$

On veut montrer que le rang de cette jacobienne est 3 en tout point  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ . Comme  $x, y$  et  $z$  jouent des rôles symétriques, on suppose  $x \neq 0$ . Considérons le déterminant du mineur formé par les lignes 1, 4 et 6 :

$$\begin{vmatrix} 2x & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{vmatrix} = 2x^3$$

Puisque  $x \neq 0$ , ce déterminant est non nul. Ainsi, l'application  $f$  est une immersion, et comme  $f(P) = f(-P)$ , elle induit une immersion de  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^6$ .

#### 3.2 Plongements de l'espace projectif dans $\mathbb{R}^m$

**Définition 6** Un *plongement* de  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^m$  est une immersion injective de  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^m$ .

**Exemple** L'application  $f$  de l'exemple précédent est un plongement de  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^6$ . Vérifions son injectivité. Soit  $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^6 \setminus \{(0, 0, 0, 0, 0, 0)\}$  tels que  $f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2)$ . Les trois premières composantes de  $f$  montrent que  $(x_1, y_1, z_1) = (\pm x_2, \pm y_2, \pm z_2)$ . Les trois dernières composantes de  $f$  donnent  $(x_1, y_1, z_1) = \pm(x_2, y_2, z_2)$ .

### 3.3 Immersions dans $\mathbb{R}^3$ : la surface de Boy

Soit

$$h : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{(2x^2 - y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2) + 2yz(y^2 - z^2) + zx(x^2 - z^2) + xy(y^2 - x^2)}{\sqrt{3}} \\ \frac{(y^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2) + zx(z^2 - x^2) + xy(y^2 - x^2)}{2} \\ (x + y + z) \left( \frac{(x+y+z)^3}{4} + (y-x)(z-y)(x-z) \right) \end{pmatrix}$$

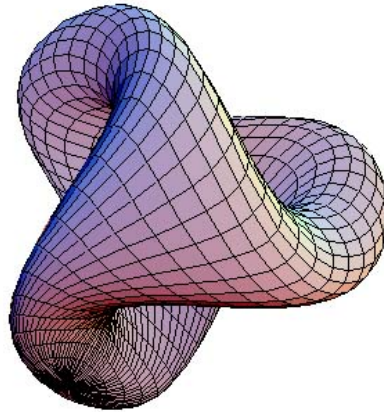


FIGURE 8: Une paramétrisation de la surface de BOY,  
Source : Didier MÜLLER

Cette application est telle que  $h(x, y, z) = h(-x, -y, -z)$ . En considérant sa jacobienne, il est possible -mais fastidieux- de montrer que  $h$  est une immersion. Cela est fait dans [3]. L'application  $h$  induit donc une immersion de  $\mathbb{R}P^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition 7** La *surface de BOY* est l'image par  $h$  de  $S^2$ .

La décomposition  $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{M}^2 \cup_{\varphi} D^2$  est visible sur la surface de BOY. La suite de dessins ci-après représente une rétractation de la surface de BOY auquel il a été ôté un disque. Le dernier dessin est un plongement standard du ruban de Möbius ayant trois demi torsions. On trouvera un petit film montrant cette retraction dans [4] et un autre montrant la construction de la surface de BOY dans [5].

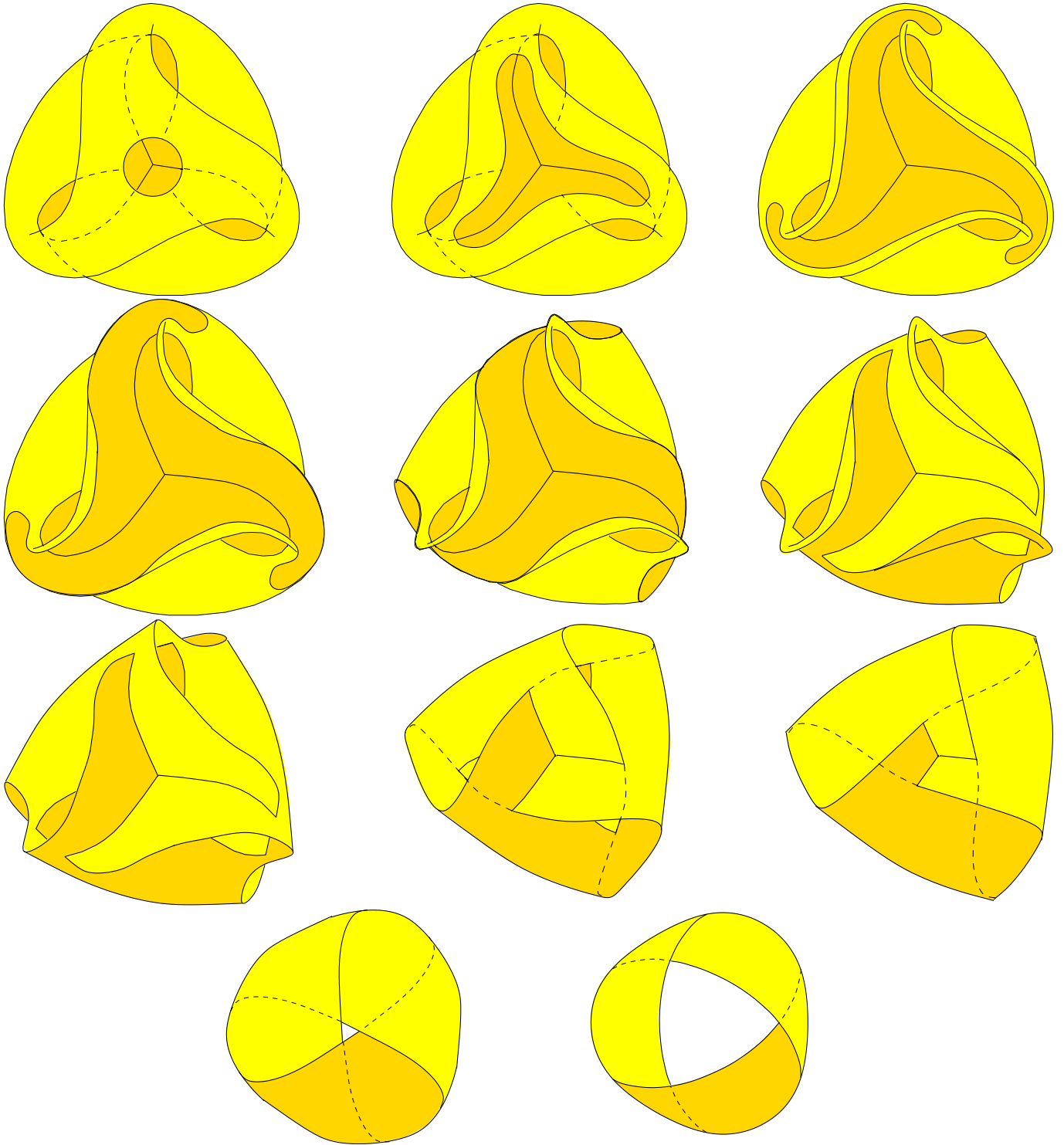


FIGURE 9: Rétraction de la surface de BOY lorsqu'on lui ôte un disque : Un ruban de Möbius  
 D'après Jean-Pierre PETIT, Le Topogicon

## 4 Représentation polyédrique

### 4.1 Polyèdre

Nous considérons ici une définition donnée par HILBERT et COHN-VOSSEN dans [6]. On trouvera des définitions plus "classiques" dans [7] et [8].

**Définition 8** Un *polyèdre* est un ensemble de polygones agencés de telle sorte que :

1. sur chaque arête, exactement deux polygones se rencontrent.
2. il est possible de se rendre d'un polygone à un autre en ne passant que par des arêtes

En particulier, cette définition autorise l'intersection de polygones. De plus, elle est adaptée au polyèdre de BREHM qui n'est ni plein, ni convexe.

### 4.2 Description du polyèdre de Brehm

Ce polyèdre, décrit dans [9] et [1], comporte trois faces pentagonales et sept faces triangulaires. Les trois pentagones sont identiques, et, parmi les sept triangles, un triangle équilatéral et deux ensembles de trois triangles identiques (trois triangles jaunes et trois bleus dans le dessin ci-dessous).

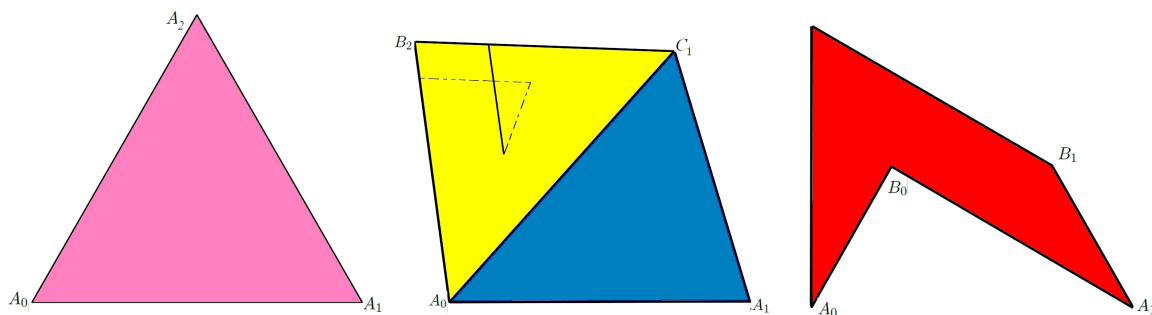
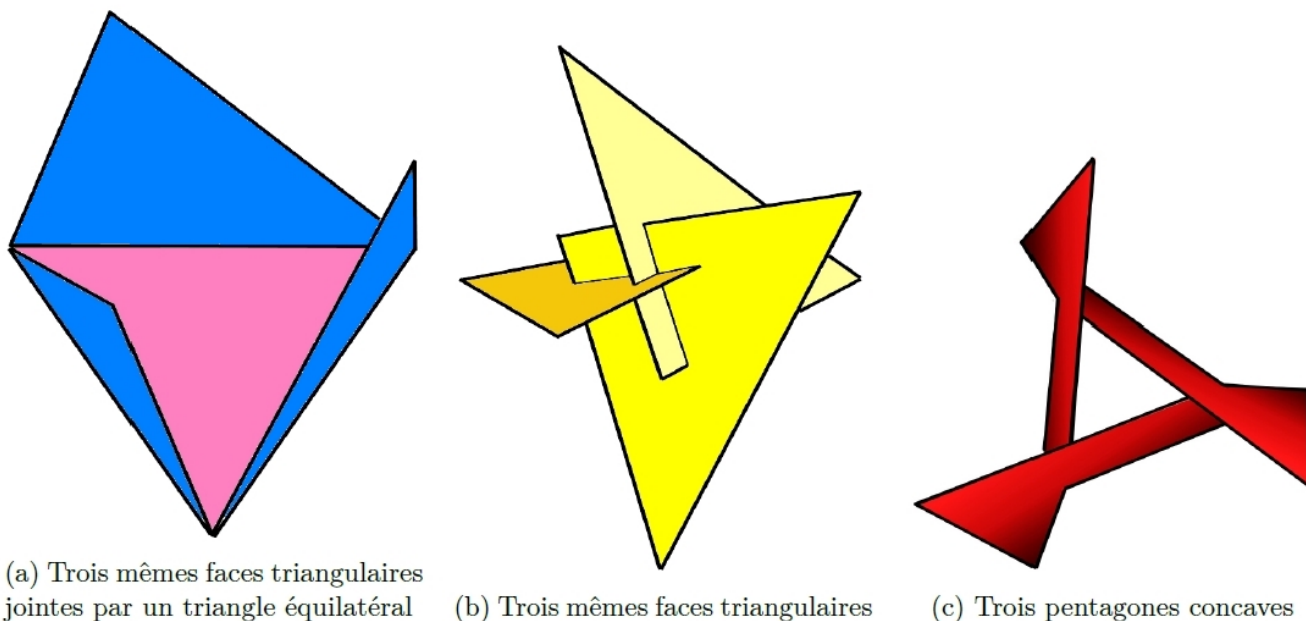


FIGURE 10: Patrons du polyèdre de BREHM

Dans le polyèdre final, ces éléments apparaîtront assemblés comme ci-dessous :



(a) Trois mêmes faces triangulaires jointes par un triangle équilatéral

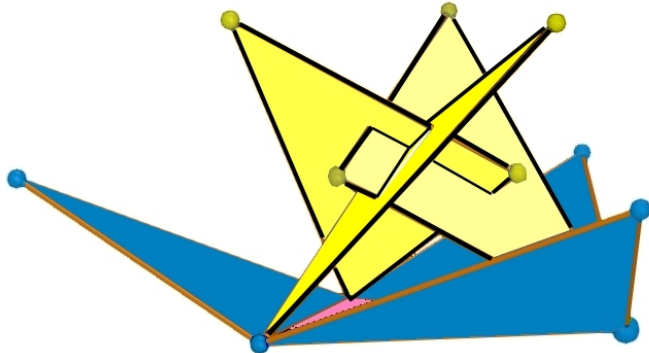
(b) Trois mêmes faces triangulaires

(c) Trois pentagones concaves

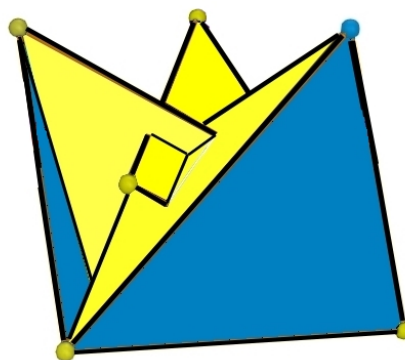


Pour construire le polyèdre, on procède en quatre temps comme le montrent les figures :

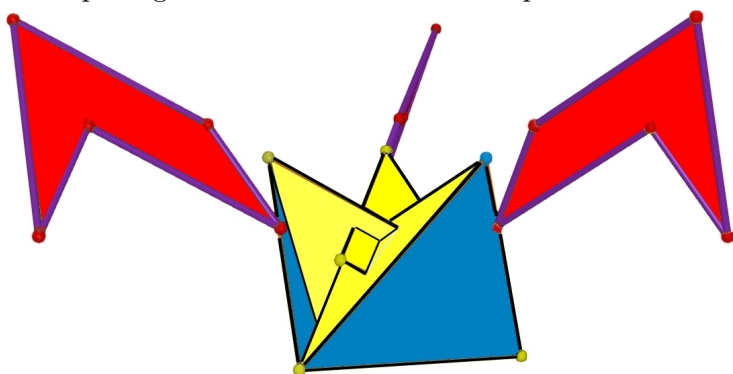
Les deux premiers blocs se joignent ainsi



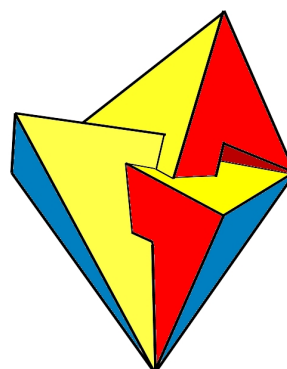
On ferme le tout



Les pentagones sont insérés au reste séparément



Et on obtient le polyèdre final

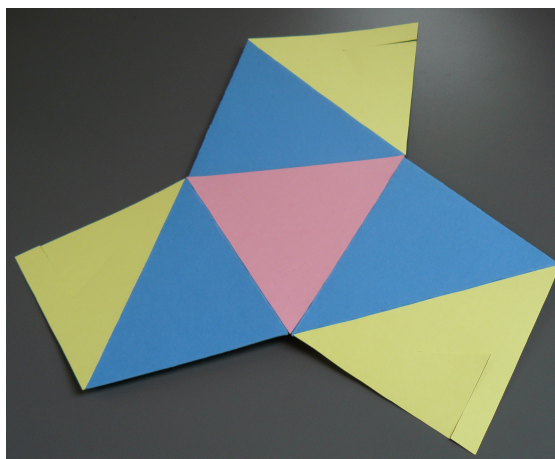
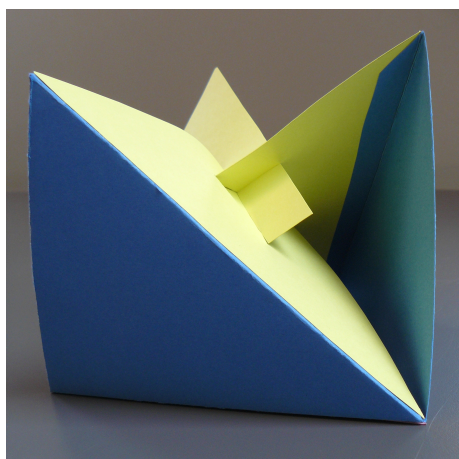


Source : [www.cabri.net](http://www.cabri.net)

Le polyèdre de BREHM comporte 9 sommets, 18 arêtes et 10 faces.

### 4.3 Décomposition topologique

On va constater que le polyèdre de BREHM se décompose en un disque topologique et un ruban de Möbius. D'une part, la réunion de l'ensemble des triangles est homéomorphe à un disque comme un simple dépliage permet de s'en convaincre :



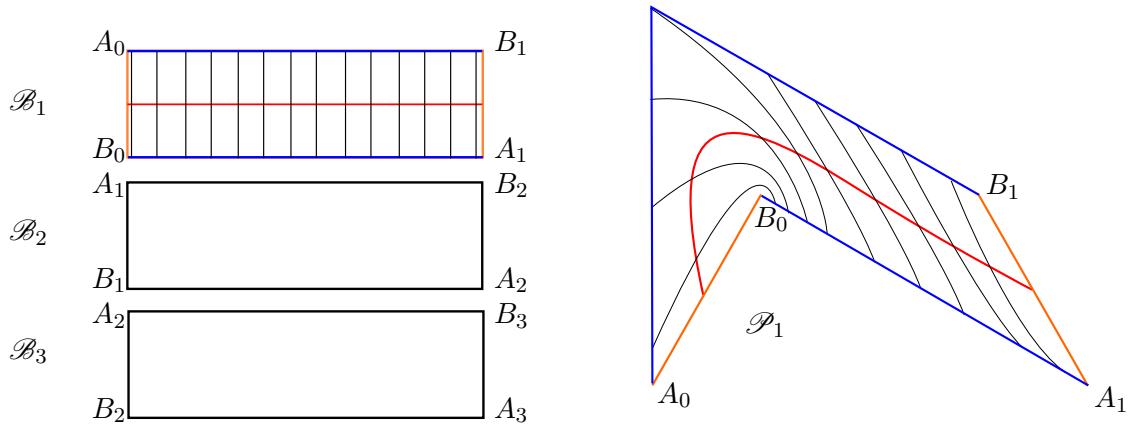


FIGURE 11: Identification des 3 pentagones à un ruban de Möbius

D'autre part, les trois pentagones forment un ruban de Möbius à trois demi torsions. Les dessins qui précèdent permettent de se figurer les fibres et l'âme de ce ruban de Möbius.

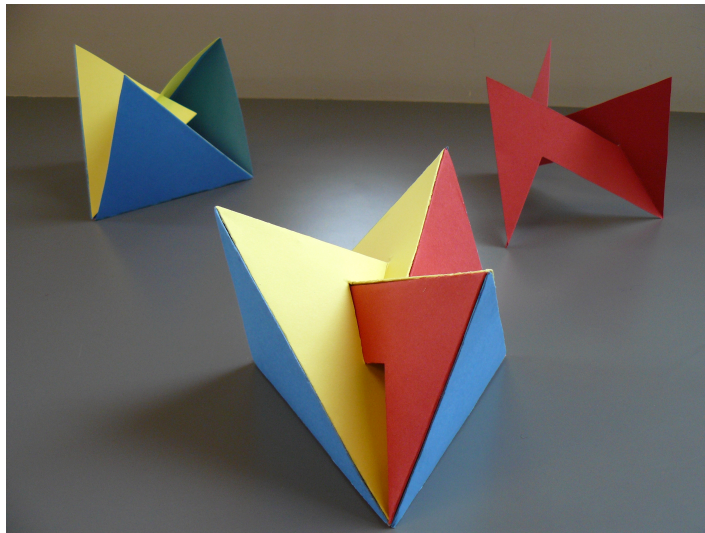


FIGURE 12: Décomposition topologique du polyèdre de BREHM

## Références

- [1] Richard DENNER, Versions polyédriques du retournement de la sphère : Utilisation de la surface de Boy, [irem.u-strasbg.fr/php/articles/94\\_Denner.pdf](http://irem.u-strasbg.fr/php/articles/94_Denner.pdf)?, 2008
- [2] Werner BOY, Über die Curvatura Integra und die Topologie der Geschlossener Flächen Dissertation, Göttingen, 1901; Math. Ann. 57 (1903), 151–184.
- [3] J Scott CARTER, How Surfaces Intersect in Space, 1993
- [4] <http://www.indiana.edu/~minimal/archive/NonOrientable/NonOrientable/Bryant-anim/web/qt.mov>
- [5] <http://www.youtube.com/watch?v=9gRx66xKXek>
- [6] HILBERT et COHN-VOSSEN, Geometry and the imagination, 1932
- [7] COXETER, Regular Polyhedra
- [8] Michèle AUDIN, Géométrie CAPES
- [9] Ulrich BREHM, How to build minimal polyhedra models of the Boy surface, 1990
- [10] François APÉRY, Models of the real projective plane, 1987
- [11] Klaus JÄNICH, Topology, 1984
- [12] <http://www.mathcurve.com/polyedres/brehm/brehm.shtml>