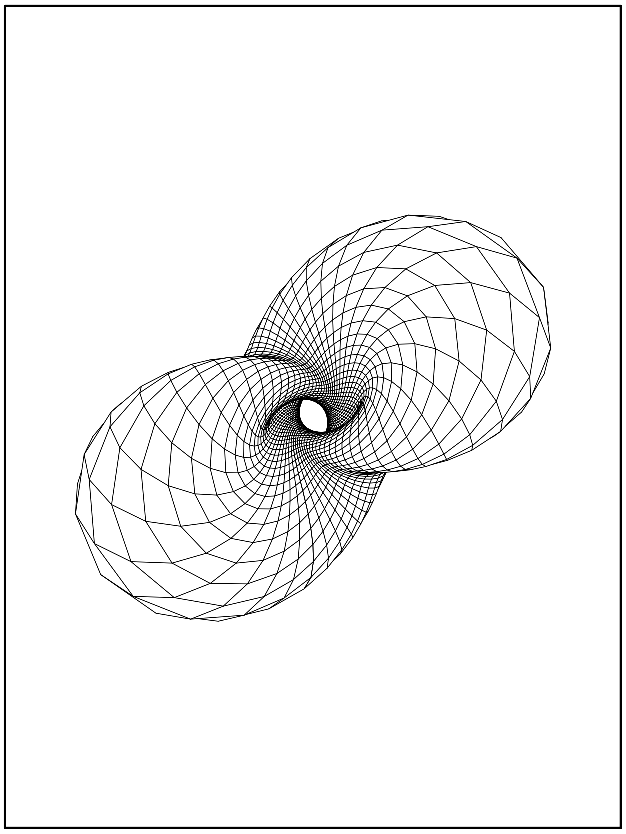
La théorie des immersions

Une introduction au h-principe

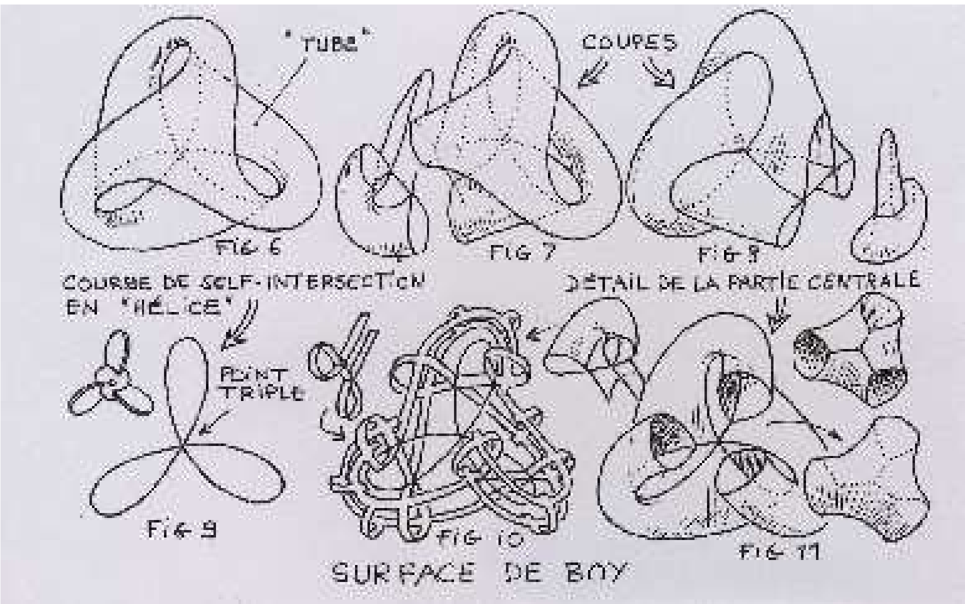


Vincent Borrelli

Avant-propos

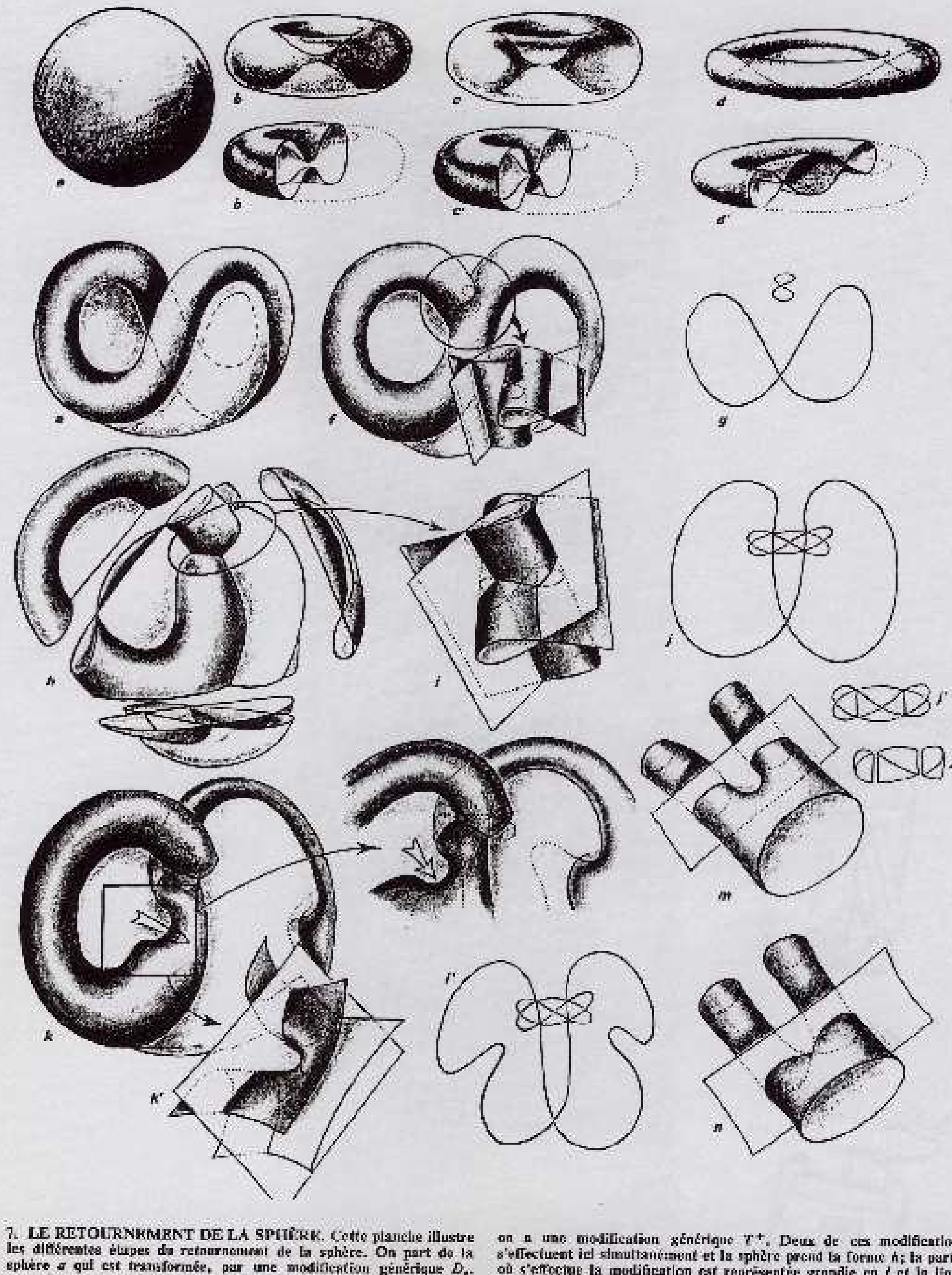
Bref historique de la théorie des immersions

Le point de départ de la théorie est la question suivante : étant données deux variétés (différentiables) M^m et N^n peut-on "voir" M comme une sous-variété de N ? Un théorème célèbre de H. Whitney affirme que c'est effectivement toujours possible si $n \geq 2m$ on dit alors que M se plonge dans N. En revanche les choses se compliquent si $m \leq n < 2m$ et deviennent, bien sûr, impossibles si $n < m$. Ainsi toute surface se plonge dans $\mathbb{R}^4$ mais toutes ne se plongent pas dans $\mathbb{R}^3$, en particulier les surfaces fermées non orientables ne peuvent pas se réaliser comme sous-variétés de $\mathbb{R}^3$. Une façon de "voir" malgré tout ces surfaces est d'affaiblir la notion de plongement en s'autorisant des points d'auto-intersection, on parle alors d'*immersion*. L'illustration ci-dessous représente la surface de Boy, une immersion de l'espace projectif $\mathbb{R}P^2$ dans $\mathbb{R}^3$ (*Source des illustrations.* – B. Morin et J.-P. Petit, C. R. A. S. (287), 767-770).

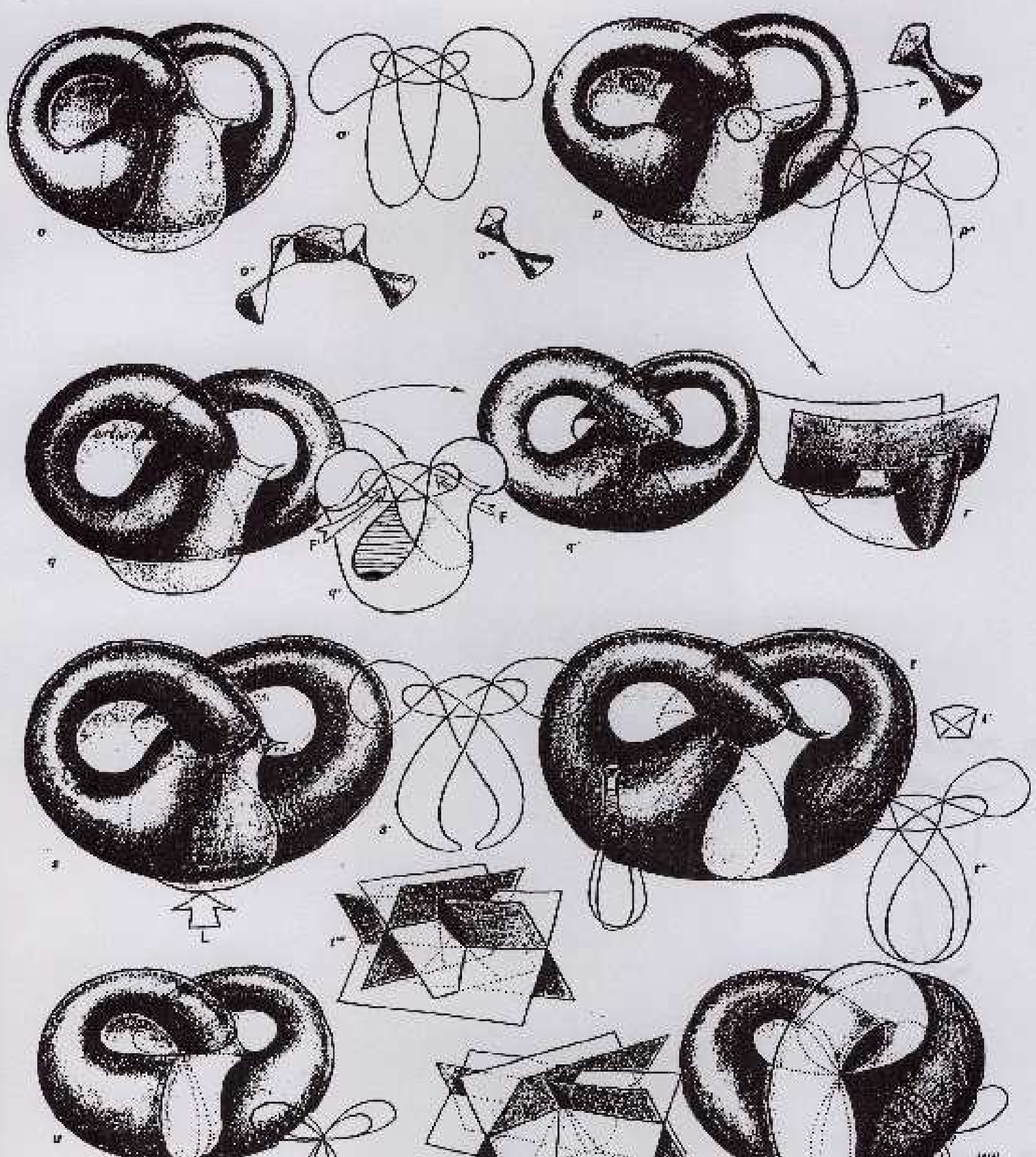


Evidemment cette représentation est moins "parlante" qu'un véritable plongement car la présence d'une courbe d'auto-intersection complique la lecture de la figure. Il s'avère néanmoins à l'usage que les immersions sont plus faciles à manipuler que les plongements et que de plus, elles interviennent un peu partout en géométrie différentielle. Ceci explique pourquoi les immersions deviennent un sujet d'étude en lui-même dès les années 60, les deux questions centrales de la théorie étant celles de l'existence et de la classification. En particulier, on veut savoir, étant données deux immersions d'une même variété, si l'on

RETOURNEMENT DE LA SPHERE



7. LE RETOURNEMENT DE LA SPHÈRE. Cette planche illustre les différentes étapes du retournement de la sphère. On part de la sphère *a* qui est transformée, par une modification générique D_e, pour former une lentille et un tube *(b, c, d)*. Puis on replie la figure obtenue *(e)* pour faire s'interpénétrer deux parties du tube par une seconde modification générique D_e dont le résultat est *f*. En *g*, apparait la courbe de self-intersection. Lorsque l'interpénétration d'un tube dans l'autre se poursuit au-delà de la couche de self-intersection, on a une modification générique T^+. Deux de ces modifications s'effectuent ici simultanément et la sphère prend la forme *h*; la partie où s'effectue la modification est représentée grandie en *i* et la ligne de self-intersection en *j*. On déforme ensuite le tube *(k)* pour lui donner une forme de paraboloïde hyperbolique *(k')* ou de « pantalon » *(m)* et on fait monter un feuillet de lenticule (assimilable au plan d'eau de la figure 5c), à travers les deux « jambes » pour réaliser une transformation de type D_-. Le moment critique de cette modification est



représenté en o et les courbes de self-intersection en o'. Les courbes de self-intersection o' et o'' annoncent la mise en communication des « tranches de mandarine » avec l'espace ambiant. En p, une des modifications D_1 est achevée (celle de droite) et les passages sont visibles sur p' et p''. Sur les dessins q' et q'', on a représenté le modèle q en deux parties où les deux modifications D_1 sont achevées. Les nouveaux passages ouverts sont symbolisés par les flèches F et F'. Les tranches de mandarine ont été mises en communication avec l'espace ambiant. On examine maintenant la partie inférieure du modèle. Par une nouvelle modification générique D_2 illustrée en s, le feuillet du tube monte selon la direction de la flèche L pour obtenir la forme en batteur à œufs des lignes de self-intersection. La dernière étape consiste à éliminer le tétraèdre du milieu représenté en t par une modification générique Q dans laquelle on pousse un plan jusqu'au point critique où les quatre sommets du tétraèdre se rassemblent en un point. On a le modèle central u''' du retournement détaillé sur la figure 6.

peut passer de l'une à l'autre par un chemin dans l'espace des immersions. La réponse à cette question est parfois très peu intuitive, l'exemple le plus célèbre dû à S. Smale étant le retournement de sphère. Les pages précédentes illustrent quelques étapes de ce retournement. (*Source des illustrations.* – Les mathématiques aujourd'hui, Belin, article de B. Morin et J.-P. Petit p. 39-52)

En fait la théorie des immersions débute véritablement avec les travaux de S. Smale sur la sphère. Elle se développe ensuite grâce à de nombreux travaux dus en particulier à M. Hirsch ($\sim$60), A. Phillips ($\sim$65), J.-P. Dax ($\sim$70), M. Gromov (70 à 90). Récemment, Y. Eliashberg et N. Mishachev (2001) ont considérablement simplifié la théorie des immersions en dégageant une notion fondamentale : l'approximation holonomique.

Organisation

Le cours se compose de cinq leçons dont nous donnons ici, pour chacune d'entre elles, le titre ainsi que les principaux résultats concernant la théorie des immersions qui y seront exposés.

Leçon I. – Variétés et applications différentiables. Existence d'un plongement de toute variété M^m dans un espace $\mathbb{R}^n$ pourvu que n soit suffisamment grand. Classification des immersions de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^2$.

Leçon II. – Fibrés. Les variétés orientables M^m qui admettent une immersion dans $\mathbb{R}^{m+1}$ sont stablement parallélisables.

Leçon III. – Petit nécessaire de théorie homotopique. Théorème de classification des applications.

Leçon IV. – Le h-principe. Classification des immersions, théorème de Smale-Hirsch, paradoxe de Smale.

Leçon V. – L'intégration convexe. Démonstration du théorème de classification des immersions.

Au delà de ces résultats, nous découvrirons, pour y parvenir, des techniques dont l'intérêt dépasse amplement le cadre de la théorie des immersions. Le *h-principe*, mis en évidence par M. Gromov alors qu'il revisitait les travaux de Smale-Hirsch, a un champ d'application débordant très largement la théorie des immersions : en géométrie riemannienne, en géométrie symplectique, etc.

Notons également que la théorie des immersions est une branche de la topologie différentielle et que, par conséquent, elle interagit naturellement avec les autres branches de cette discipline. A titre d'illustration, la résolution de la conjecture ci-dessous, propre à la théorie, implique la conjecture de Poincaré (elle est même équivalente).

Conjecture. – *Soit* M^3 *une variété* C^1 *et* $g : \mathbb{S}^2 \to M^3$ *un plongement régulièrement homotope à une immersion* $f : \mathbb{S}^2 \to M^3$ *qui peut s'étendre à* D^3*. Alors,* g *peut s'étendre en une immersion* $D^3 \to M^3$.

Conjecture de Poincaré. – *Soit* M^3 *une variété connexe, compacte, sans bord et simplement connexe alors* M^3 *est homéomorphe à* $\mathbb{S}^3$.

Avertissement. – Ce cours ne prétend pas à l'originalité. Je me suis fortement inspiré des livres de M. Hirsch (*Differential Topology*, GTM, Springer-Verlag) et F. Laudenbach (*Topologie différentielle*, Cours donné à l'Ecole Polytechnique) pour les premières leçons et ceux de D. Spring (*Convex Integration Theory*, Birkhäuser) et de Y. Eliashberg et N. Mishachev (*Introduction to the h-principle*, GSM, AMS) pour les suivantes.

Table des matières

Chapitre 1

Variétés et applications différentiables

1.1 Varietés et sous-variétés (rappels)

Définition. – Un espace topologique M est une *variété de dimension* n si :

1) M est séparée,
2) M est une union dénombrable de compacts,
3) M est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$.

La dernière condition équivaut à l'existence d'un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ de M tel que pour chaque $i \in I$, il existe une application $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ qui est un homéomorphisme sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. La donnée de $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ est appelée un *atlas*. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, on a des changements de cartes :

$$\psi_{ij} : \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j).$$

Ces applications partent d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et arrivent dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on peut donc parler de la classe de ces fonctions. Si il existe sur M un atlas dont les ψ_{ij} sont tous de classe C^r, on dit que M est une *variété de classe* C^r.

Exemples. – $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$, $\mathbb{T}^n$, $\Sigma_g = \mathbb{T}^2\sharp\cdots\sharp\mathbb{T}^2$ (g fois), $\mathbb{M}^2$ le ruban de Möbius, groupes de Lie.

Remarque. – Les conditions 1) et 2) de la définition permettent d'écarter certains espaces "pathologiques" (*cf.* Berger-Gostiaux p. 68-69 pour des exemples). Elles assurent aussi l'existence d'une partition de l'unité.

Définition. – Une application $f : M \to N$ entre variétés de classe C^r est *de classe* C^r au point $x \in M$ si il existe des cartes de M au voisinage de x et de N au voisinage de $f(x)$ telle que, lue sur ces cartes, f soit C^r.

Cette définition est consistante, elle ne dépend pas des cartes choisies.

Avertissement. – Dans ce cours, on suppose - sauf mention explicite du contraire - que l'on travaille avec des variétés de classe C^∞.[1]

Proposition (Partition de l'unité). – *Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert C^∞ de M alors, pour tout $i \in I$, il existe $\lambda_i : M \overset{C^\infty}{\longrightarrow} [0,1]$ telle que :*
- *Supp $\lambda_i \subset U_i$,*
- *$\{Supp\ \lambda_i\}_{i\in I}$ est localement fini,*
- *$\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$.*

La partition de l'unité est un outil permettant de passer d'une construction locale sur des ouverts de M à une construction globale sur tout M.

Soit G un sous-groupe de $Diff^\infty(M)$.[2] On rappelle que G agit *librement* sur M si $\forall x \in M$, $g \neq id \Rightarrow g.x \neq x$, G agit *proprement* sur M si pour tout compact K de M, $g.K \cap K = \emptyset$ sauf peut-être pour un nombre fini d'éléments de G.

Proposition. – *a) Si G est un sous-groupe discret agissant librement et proprement sur M, alors M/G est une variété C^∞.*
b) Si G est un sous-groupe de Lie compact de $Diff^\infty(M)$ agissant librement sur M alors M/G est une variété C^∞ de dimension dim M − dim G.
c) Si M est un groupe de Lie et G un sous-groupe de Lie fermé, alors M/G est une variété C^∞ de dimension dim M − dim G.

Exemple. – $\mathbb{R}P^n = \mathbb{S}^n/\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{C}P^m = \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$, $\Sigma_g = H/\Gamma_g$, H = demi-plan de Poincaré, $\Gamma_g \subset SL(2,\mathbb{R})$.

Définition. – Une partie $M \subset \mathbb{R}^n$ est une *sous-variété de dimension m* si pour tout $x \in M$, il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant x, ou ouvert U' de $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $\Phi : U \to U'$ tel que :

$$\Phi(U \cap M) = U' \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}).$$

Une partie $M \subset N$ est une sous-variété si dans les cartes de N, M apparaît comme une sous-variété.

Exemples. – $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{S}^n$, $\mathbb{R}P^m \subset \mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^m \subset \mathbb{C}P^n$, $SO(m) \subset SO(n)$.

1.2 Immersions et plongements

Définition. – Une application $f : M^m \overset{C^\infty}{\longrightarrow} N^n$ est une *immersion* si lue sur les cartes, elle est de rang maximum (i. e. de rang m). L'application f est une *submersion* si lue sur

[1] Un résultat de R. Palais affirme que si M admet un atlas C^1 alors il existe un atlas C^∞ sur M définissant la même structure C^1. Autrement dit, il n'y a pas grande différence à supposer M C^1 ou M C^∞.

[2] La topologie des espaces d'applications est abordée plus loin.

les cartes, elle est de rang n. Enfin, f est un *plongement* si $f(M)$ est une sous-variété de N et f un difféomorphisme de M dans $f(M)$.

Un critère. – Si f est une immersion injective propre alors f est un plongement (la réciproque est fausse, *cf.* plus bas). On parle alors de plongement propre.

Rappelons que f est propre si la préimage de tout compact est compacte. En particulier, si la source est compacte, f est propre. La démonstration de ce critère est une application du théorème d'inversion locale.

Exemples. – Les projections $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^n$, $(m \geq n)$, $\mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$, $\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}P^n$, $\mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ sont des submersions. Les inclusions $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $SO(n) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des plongements.

Exemple. – La surface de Boy est une immersion de $\mathbb{R}P^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exemple. – L'espace projectif $\mathbb{R}P^2$ se plonge dans $\mathbb{R}^4$. En effet, $\mathbb{R}P^2$ est l'union d'un ruban de Möbius $\mathbb{M}^2$ et d'un disque D^2 le long du bord $\partial\mathbb{M}^2 = \partial D^2 = \mathbb{S}^1$. Il suffit de "pousser" $\mathbb{M}^2$ et D^2 de part et d'autre de $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ en laissant $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^3$ fixe.

Contre-exemples. – 1) L'application $f : \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ est une immersion et $f(\mathbb{S}^1)$ est une sous-variété de $\mathbb{C}$ mais f n'est pas un plongement car elle ne réalise pas un difféomorphisme sur son image.
2) L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = \mathbb{T}^2$, $u \mapsto (u, \alpha u)$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est une immersion injective mais pas un plongement car $f(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{T}^2$.
3) L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $u \mapsto (1 + \frac{1}{u})e^{iu}$ est un plongement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ mais pas une immersion propre.

Théorème. – *Toute variété compacte C^∞ admet un plongement dans $\mathbb{R}^n$ pourvu que n soit suffisamment grand.*

La démonstration de ce théorème passe par le lemme de rétrécissement.

Lemme de rétrécissement. – *Soit $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert de M, il existe un recouvrement ouvert $\{V_i\}_{i\in I}$ avec $\overline{V_i} \subset U_i$ tel que $\{V_i\}_{i\in I}$ soit localement finie.*

Démonstration du lemme. – Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une partition de l'unité subordonnée à $\{U_i\}$. On pose $V_i = \lambda_i^{-1}(]0,1])$, on a :

$$\overline{V_i} = \overline{\{x \in M,\ \lambda_i(x) \neq 0\}} = Supp\ \lambda_i \subset U_i,$$

et $\{V_i\}_{i\in I}$ est localement finie car $\{Supp\ \lambda_i\}_{i\in I}$ elle-même est localement finie. C'est aussi un recouvrement puisque pour tout x dans M il existe un indice i tel que $\lambda_i(x) \neq 0$. □

Démonstration du théorème. – Soit $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ un atlas fini, i. e. $I = \{1, 2, \cdots, N\}$ et $\alpha_i : M \to [0,1]$, $i \in I$, telles que $\alpha_i \equiv 1$ sur $\overline{V_i}$ et $Supp\ \alpha_i \subset U_i$.[3] On définit :

$$\begin{array}{rccl} f : & M^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^{N(m+1)} \\ & x & \longmapsto & (\alpha_1(x)\varphi_1(x), \alpha_1(x), \cdots, \alpha_N(x)\varphi_N(x), \alpha_N(x)). \end{array}$$

Cette application est propre car M est compacte. Elle est aussi injective. En effet, supposons que $f(x) = f(y)$ avec $x \in V_i$, alors $1 = \alpha_i(x) = \alpha_i(y)$ donc $y \in V_i$. Mais alors $\alpha_i(x)\varphi_i(x) = \alpha_i(y)\varphi_j(y)$ entraîne $\varphi_i(x) = \varphi_j(y)$ soit $x = y$. Montrons que f est une immersion. Soit $x \in V_i$ et $\pi_i : \mathbb{R}^{N(m+1)} \to \mathbb{R}^m$ la projection telle que :

$$\begin{array}{rccl} h = \pi_i \circ f_{|V_i} : & V_i & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longmapsto & \alpha_i(x)\varphi_i(x) = \varphi_i(x). \end{array}$$

On a $rang_x\ h = m$. D'autre part : $rang\ \pi_i \circ f \le \min(rang\ \pi_i, rang\ f)$, or $rang\ \pi_i = m$ donc $rang_x\ f \ge m$, et par conséquent $rang_x\ f = m$. □

Remarque. – Ce théorème reste vrai même si M n'est plus supposée compacte. Pour une démonstration, voir par exemple l'ouvrage de M. Adachi.

On note $I(M, \mathbb{R}^n)$ (resp. $E(M, \mathbb{R}^n)$) l'espace des immersions (resp. des plongements) de M dans $\mathbb{R}^n$, ces deux espaces sont des sous-espaces de $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ dont il faut maintenant préciser la topologie : c'est celle de la convergence uniforme sur les compacts des dérivées de tout ordre. Soit (K_n) une famille dénombrable de compacts recouvrant M, la topologie de $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ est métrisable à partir de la famille des semi-métriques suivantes :

$$d^r_{K_n}(f, g) = \sup_{K_n} |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)|$$

où r est un multi-indice de dérivation. Bien sûr, si M est compacte, on peut réduire la famille (K_n) à un seul élément. Cette topologie est appelée la topologie des compacts-ouverts, l'origine de ce nom est bien visible lorsque l'on remplace $\mathbb{R}^n$ par une variété N^n quelconque. Pour définir une "distance" de g à une application f donnée, il faut prendre un compact K de M et un ouvert U de N qui soit un domaine de carte et tel que $f(K) \subset U$. On note :

$$W^r_{K,U,\epsilon}(f) = \{g \in C^\infty(M, N) \mid g(K) \subset U,\ d^r_K(f, g) < \epsilon\}.$$

L'unique topologie pour laquelle les intersections finies de $W^r_{K,U,\epsilon}(f)$ forment une base de voisinage est la topologie des compacts-ouverts de $C^\infty(M, N)$.

Théorème. – *Soit M compacte, alors $I(M, \mathbb{R}^n)$ et $E(M, \mathbb{R}^n)$ sont des ouverts de $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. – CAS DES IMMERSIONS. – Soit $d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d^k}{1+d^k}$ où $d^k = \sum_{|r|=k} d^r_M$. Soit $f \in I(M, \mathbb{R}^n)$, supposons que toutes les boules $B(f, \frac{1}{k})$ contiennent un élément f_k qui

[3] De tels α_i existent car $\overline{V_i}$ fermé dans M compact $\Rightarrow \overline{V_i}$ compact $\Rightarrow K_i = \varphi_i(\overline{V_i})$ compact dans $\Omega_i = \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m$. Il existe $\epsilon_i > 0$ tels que $K_i^{\epsilon_i} = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(x, K_i) \le \epsilon_i\} \subset \Omega_i$. Prendre $\alpha_i = 1 - \lambda(\frac{d^2(x,K_i)}{\epsilon_i})$ avec $\lambda : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$, C^∞, $\lambda(0) = 0$, $\lambda(x) = 1$ si $x \ge 1$.

ne soit pas une immersion. Il existe donc $x_k \in M$, v_k de norme 1 tels que :

$$df_k(x_k)(v_k) = 0.$$

Puisque M est compacte, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $x_k \to x$ et travailler dans une seule carte contenant x. On peut alors supposer que $|v_k| = 1$ pour une norme sur cette carte puis, quitte à extraire une sous-suite, que $v_k \to v$ avec v de norme 1. Or $f_k \to f$ donc $0 = df_k(x_k)(v_k) \to df(x)(v) = 0$. Contradiction.

Cas des plongements. – Supposons qu'il existe $f_k \to f$ avec $f_k \notin E(M, \mathbb{R}^n)$. Puisque M est compacte et $I(M, \mathbb{R}^n)$ est ouvert, c'est donc que les f_k ont des points d'auto-intersections. Soient $a_k \neq b_k$ des points tels que $f_k(a_k) = f_k(b_k)$. On peut supposer $a_k \to a$, $b_k \to b$, or $f_k(a_k) = f_k(b_k) \Rightarrow f(a) = f(b)$. Mais f étant un plongement $a = b = x_0$. Utilisons une carte au voisinage de x_0, dans cette carte $v_k = \frac{b_k - a_k}{|b_k - a_k|}$ est un vecteur unitaire tangent, on peut supposer $v_k \to v$ (unitaire). Un développement de Taylor de f_k sur une boule B centrée en x_0 permet d'écrire :

$$\frac{|f_k(b_k) - f_k(a_k) - df_k(a_k)(b_k - a_k)|}{|b_k - a_k|} \leq \frac{1}{2} \sup_B |Hess\ f_k||b_k - a_k|.$$

Puisque $f_k \to f$, on peut toujours supposer :

$$\sup_B |Hess\ f_k| \leq 2 \sup_B |Hess\ f|$$

et donc :

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|f_k(b_k) - f_k(a_k) - df_k(a_k)(b_k - a_k)|}{|b_k - a_k|} = 0.$$

Donc $\lim_{k \to \infty} df_k(a_k)(v_k) = 0$ car $f_k(b_k) = f_k(a_k)$. D'autre part :

$$\lim_{k \to \infty} df_k(a_k)(v_k) = df(x_0)(v).$$

Contradiction. □

Remarque. – Le théorème reste vrai même si $\mathbb{R}^n$ est remplacé par une variété N quelconque. Si M n'est plus supposée compacte, le théorème est encore vrai à condition d'abondonner la topologie des compacts-ouverts et de lui préférer la topologie fine. Cette topologie est celle que l'on obtient en prenant comme base de voisinages les intersections dénombrables de $W^r_{K,U,\epsilon}$. Si M est compacte, on obtient la même topologie que celle des compacts-ouverts mais si M n'est plus compacte, elle est beaucoup plus large. En particulier $C^\infty(M, N)$ n'est pas métrisable, mais c'est tout de même un espace de Baire : l'intersection dénombrable d'ouverts denses est dense. On montre également que $Sub(M, N)$ (resp. $Diff(M)$) est un ouvert de $C^\infty(M, N)$ (resp. $C^\infty(M, M)$).

Définition. – Soient f_0 et f_1 deux immersions. On dit que f_0 et f_1 sont *régulièrement homotopes* si il existe une application C^∞ $F : M \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, $F(x, s) = F_s(x)$ telle que $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$, et F_s est une immersion pour tout $s \in [0, 1]$.

Une telle application fournit un chemin *continu* $F : [0,1] \to I(M, \mathbb{R}^n)$ joignant f_0 et f_1. Une simple famille d'immersions C^∞ f_s dépendant continûment du paramètre $s \in [0,1]$ donne un chemin dans $I(M, \mathbb{R}^n)$ non nécessairement continu (la topologie de $I(M, \mathbb{R}^n)$ est la topologie fine).

Définition. – Soient f_0 et f_1 deux plongements. On dit que f_0 et f_1 sont *isotopes* si il existe une application C^∞ $F : M \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $F(x,s) = F_s(x)$ telle que $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$, et F_s est un plongement pour tout $s \in [0,1]$.

1.3 Immersions du cercle dans $\mathbb{R}^2$

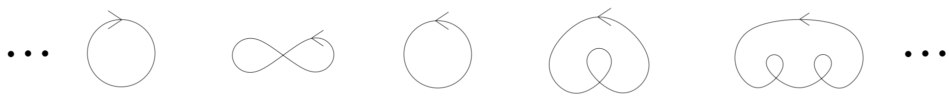
On munit $\mathbb{S}^1$ et $\mathbb{R}^2$ d'une orientation. Si $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ est une immersion alors son application tangente fournit une application $\gamma' : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{R} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dont on peut calculer le nombre de tours $N(\gamma')$. Rappelons que :

$$N(\gamma') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} (\gamma')^* \left(\frac{xdy - ydx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \in \mathbb{Z}.$$

On définit l'indice $I(\gamma)$ de γ comme étant le nombre de tours $N(\gamma')$, puisque $I(\gamma)$ est clairement invariant par homotopie régulière, on a une application :

$$\begin{array}{rccc} I : & \pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & [\gamma] & \longmapsto & I(\gamma). \end{array}$$

Cette application est surjective comme le montre l'examen des exemples ci-dessous :



$I(\gamma) = -1$ $\quad I(\gamma) = 0$ $\quad I(\gamma) = 1$ $\quad I(\gamma) = 2$ $\quad I(\gamma) = 3$

Le point important est que cette application est en réalité une bijection.

Théorème de Whitney-Graustein (1937). – *On a : $\pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) \simeq \mathbb{Z}$, l'identification étant donnée par l'indice.*

Démonstration du théorème de Whitney-Graustein. – Il suffit d'établir l'injectivité de I. Soient γ_0, γ_1 telle que $N(\gamma_0') = N(\gamma_1')$, d'après le théorème de Hopf, il existe une homotopie

$$\sigma_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathcal{R}$$

telle que $\sigma_0 = \gamma_0'$ et $\sigma_1 = \gamma_1'$. L'idée serait d'intégrer cette homotopie pour obtenir une homotopie régulière joignant γ_0 à γ_1. Malheureusement

$$s \stackrel{\Gamma_t}{\longmapsto} \int_0^s \sigma_t(u) du$$

n'est pas une courbe fermée en général. Nous dirons que σ_t est *holonomique* (ou parfois plus simplement "intégrable") précisément quand la courbe Γ_t est fermée. La stratégie de la démonstration est de pertuber σ_t jusqu'à n'obtenir que des courbes intégrables.

Proposition 1. – *Soit $\sigma_t : \mathbb{S}^1$ joignant γ_0' à γ_1', il existe une application :*

$$\begin{array}{rccc} \Sigma : & [0,1]\times[0,1] & \longrightarrow & C^\infty(\mathbb{S}^1,\mathcal{R}) \\ & (t,s) & \longmapsto & \Sigma_{t,s} \end{array}$$

telle que $\Sigma_{t,0} = \sigma_t$, $\Sigma_{0,s} = \gamma_0$, $\Sigma_{1,s} = \gamma_1$ et $\Sigma_{t,1}$ est holonomique.

Cette proposition implique le théorème puisque

$$\gamma_t(s) = \int_0^s \Sigma_{t,1}(u)du$$

fournit une homotopie régulière joignant γ_0 à γ_1. Considérons d'abord une proposition plus simple.

Proposition 2. – *Soit $\sigma : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{R}$, il existe une homotopie $\sigma_t : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{R}$, telle que $\sigma_0 = \sigma$ et σ_1 soit holonomique.*

Démonstration de la proposition 2. – Quitte à effectuer une première homotopie radiale, on peut toujours supposer que $\sigma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, on peut en outre supposer que σ n'est pas une application constante. Soit $V = \int_0^1 \sigma(u)du$ (on a identifié $\mathbb{S}^1$ à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$). Puisque D^2 est convexe, $V \in int(D^2)$ et l'homotopie $\sigma_t = \sigma - tV$ convient. □

Une version à paramètre de ce raisonnement permet d'obtenir la proposition 1, elle est laissée au lecteur. □

1.4 Espace des jets

Définition. – Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $f \in C^\infty(U,\mathbb{R}^n)$, le *r-jet de* f en x est le uplet :

$$j^r f(x) = (x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x), \cdots, \partial^\alpha f(x), \cdots)$$

où α parcourt tous les multi-indices de dérivation tels que $|\alpha| \leq r$.

Soit $d_r = d_r(m,r)$ le nombre de dérivées partielles ∂^α d'ordre r, le r-jet $j^r f(x)$ peut être considéré comme un point de l'espace $J^r(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{nd_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{nd_r}$ et $j^r f$ fournit une application :

$$\begin{array}{rccc} j^r f : & U & \longrightarrow & J^r(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \\ & x & \longmapsto & j^r f(x) \end{array}$$

qui s'identifie à un développement de Taylor à l'ordre r. Notons que :

$$J^1(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$$

et plus généralement :

$$J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \prod_{k=1}^{r} \mathcal{L}^k_{sym}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

où $\mathcal{L}^k_{sym}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ est l'espace vectoriel des applications k-linéaires symétriques de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Si M et N sont des variétés, un r-jet est une classe d'équivalence $[x, f, U]_r$ de triplets (x, f, U) où $U \subset M$ est un ouvert, $x \in U$ et $f : U \to N$. La relation d'équivalence est la suivante : $[x, f, U]_r = [x', f', U']_r$ si $x = x'$ et si il existe des cartes $V \subset M$ et $W \subset N$ telles que, lues dans ces cartes, f et f' aient les mêmes dérivées jusqu'à l'ordre r en x. Bien sûr, si cela est vrai pour un certain couple (V, W) de cartes, cela restera vrai pour tout autre couple de cartes. On note $j^r f(x)$ la classe d'équivalence, l'ensemble $J^r(M, N)$ de tous les r-jets a une structure de variété, il est naturellement muni d'un certain nombre d'applications :

-l'application source $\sigma : J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to M$, $[x, f, U]_r \mapsto x$,

-l'application but $\tau : J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to N$, $[x, f, U]_r \mapsto f(x)$,

-les projections $p^r_q : J^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to J^q(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $[x, f, U]_r \mapsto [x, f, U]_q$, $(r \geq q)$.

Une fonction $f : M \longrightarrow N$ fournit une application :

$$\begin{array}{rccl} j^r f : & M & \longrightarrow & J^r(M, N) \\ & x & \longmapsto & j^r f(x). \end{array}$$

Il est facile de voir, en se plaçant dans une carte, que :

$$\sigma^{-1}(x) \simeq \mathbb{R}^n \times \prod_{k=1}^{r} \mathcal{L}^k_{sym}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Définition. – On appelle *relation différentielle des immersions* l'ensemble $\mathcal{I} = \cup_{(x,y) \in M \times N} \mathcal{I}_{(x,y)} \subset J^1(M, N)$ où $\mathcal{I}_{(x,y)} = \{L : T_x M \to T_y N \mid rg\ L = m\}$.

Par définition, $f : M \to N$ est une immersion si et seulement si $j^1 f(M) \subset \mathcal{I}$.

1.5 Exercices

Exercice. 1. – a) Un k-repère orthonormé de l'espace euclidien $\mathbb{E}^n$ est un ensemble ordonné de k vecteurs linéairement indépendants et deux-à-deux orthogonaux. On note $V_{n,k}$ l'ensemble des k-repères orthonormés de $\mathbb{E}^n$. Montrer que $V_{n,k}$ est une variété - dite de Stiefel - en l'identifiant à un espace homogène (= quotient de deux groupes de Lie).
b) Même question avec l'ensemble $G_{n,k}$ des k-sous-espaces linéaires de $\mathbb{R}^n$ ($G_{n,k}$ est appelée la grassmannienne des k-plans de $\mathbb{R}^n$).

Exercice. 2. – a) Montrer qu'il existe une immersion de $\mathbb{T}^2 \setminus \{point\}$ dans $\mathbb{R}^2$.
b) Idem pour $\mathbb{T}^3 \setminus \{point\}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice. 3. – Plongement de $\mathbb{R}P^n$ dans $\mathbb{S}^{2n}$ (plongements de Hopf-James). Soit $h : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+k+1}$ une application bilinéaire symétrique telle que :

$$x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \Rightarrow h(x, y) \neq 0.$$

Soit $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^{n+k}$, $x \mapsto \frac{h(x,x)}{|h(x,x)|}$.
a) Montrer que $g(x) = g(y) \iff x = \pm y$ (considérer $h(x+y, x-y)$).
b) Montrer que g est une immersion.
c) Montrer que g induit un plongement de $\mathbb{R}P^n$ dans $\mathbb{S}^{n+k}$.
d) En considérant $h(x_0, \cdots, x_n, y_0, \cdots, y_n) = (z_0, \cdots, z_n)$ avec $z_k = \sum_{i+j=k} x_i y_j$, montrer que $\mathbb{R}P^n$ se plonge dans $\mathbb{S}^{2n}$ et dans $\mathbb{R}^{2n}$.

Exercice. 4. – Soit $f : M \xrightarrow{C^\infty} N$. On peut définir df, $j^1 f$, $j^2 f$ mais pas $Hess\ f$ en général, pourquoi ?

Exercice. 5. – Montrer que $\pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2)) = \mathbb{Z}_2$.

Chapitre 2

Fibrés

2.1 Le théorème du voisinage tubulaire

Soit $M^m \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété, *l'espace tangent* à M est l'ensemble :

$$TM = \{(x,v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \in T_xM\}.$$

On a une projection naturelle $p : TM \to M$, $(x,v) \mapsto x$ dont la fibre $p^{-1}(x) = T_xM \simeq \mathbb{R}^m$ est l'espace tangent à M au point x. L'espace tangent TM est muni de la topologie induite par $M \times \mathbb{R}^n$, c'est en fait une variété C^∞ de dimension $2m$. Si $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i\in I}$ sont des cartes de M, alors les applications

$$\begin{array}{rccc} \Phi_i : & p^{-1}(\mathcal{U}_i) & \longrightarrow & V_i \times \mathbb{R}^m \\ & (x,v) & \longmapsto & (\varphi_i(x), w) \end{array}$$

où w est l'unique vecteur tel que $d(\varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}(w) = v$ et $V_i = \varphi_i(\mathcal{U}_i) \subset \mathbb{R}^m$, sont des cartes de TM. En particulier :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_i^{-1} : & V_i \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & p^{-1}(\mathcal{U}_i) \\ & (y,w) & \longmapsto & (\varphi_i^{-1}(y), d(\varphi_i^{-1})_y(w)) \end{array}$$

et les changements de cartes sont donnés par :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : & V_i' \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & V_j' \times \mathbb{R}^m \\ & (y,w) & \longmapsto & (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(y), d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_y(w)) \end{array}$$

où $V_i' = \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ et $V_j' = \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$. Il est souvent commode de considérer des *cartes au dessus des* $\mathcal{U}_i$, à savoir :

$$\begin{array}{rccc} T\varphi_i : & p^{-1}(\mathcal{U}_i) & \longrightarrow & \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^m \\ & (x,v) & \longmapsto & (x,w). \end{array}$$

Les changements de cartes :

$$\begin{array}{rccc} T\varphi_j \circ (T\varphi_i)^{-1} : & (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{R}^m \\ & (x,w) & \longmapsto & (x, d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}(w)). \end{array}$$

peuvent alors être vus comme des applications :

$$\begin{array}{rccc} t_{ij} : & \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j & \longrightarrow & Gl(m, \mathbb{R}) \\ & x & \longmapsto & d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}, \end{array}$$

on les appelle alors des *fonctions de transitions.*

On munit $\mathbb{R}^m$ de la métrique euclidienne, l'*espace normal* à M est l'ensemble :

$$NM = \{(x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \in N_x M = (T_x M)^\perp\}.$$

Avec la topologie induite par $M \times \mathbb{R}^n$, cette espace apparaît comme une sous-variété de dimension n de $M \times \mathbb{R}^n$. Comme précédemment, on a une projection naturelle $p : NM \to M$, $(x, v) \mapsto x$ avec pour fibre $p^{-1}(x) = N_x M \simeq \mathbb{R}^{n-m}$.

Soit $r > 0$, l'ensemble :

$$Tub(r) = \{(x, v) \in N_x M \mid |v| < r\}$$

est une sous-variété de NM appelée le *tube de rayon* r. L'application exponentielle de $\mathbb{R}^n$ donne par restriction une application

$$\begin{array}{rccc} e: & NM & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x,v) & \longmapsto & x+v. \end{array}$$

Théorème du voisinage tubulaire (cas $N = \mathbb{R}^n$). – *Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété compacte. Si $r > 0$ est suffisamment petit alors $e_{|Tub(r)}$ est un difféomorphisme sur son image $\mathcal{V} = e(Tub(r))$, par conséquent $\mathcal{V}$ est un voisinage de M dans $\mathbb{R}^n$ dit voisinage tubulaire.*

Démonstration. – Notons que e envoie la section nulle $\mathcal{O}(NM) = \{(x, 0) \in NM\}$ sur M. On va d'abord montrer que sur un voisinage de $\mathcal{O}(NM)$, e est une immersion, bien sûr on pourra toujours choisir un voisinage qui soit un tube. Puisque $e : NM \to \mathbb{R}^n$, on a $de_{(x,0)} : T_{(x,0)}NM \to \mathbb{R}^n$ avec

$$T_{(x,0)}NM = T_x M \oplus N_x M.$$

Ainsi, pour tout $(X, V) \in T_{(x,0)}NM$, on a :

$$de_{(x,0)}(X, V) = dx_x(X) + dv_0(V) = X + V.$$

D'autre part, $\mathbb{R}^n \simeq T_x M \oplus N_x M$, donc $de_{(x,0)}$ est bijective, ceci reste vrai sur un tube $Tub(r)$ avec r suffisamment petit. Quitte à prendre r plus petit encore, $e_{|Tub(r)}$ est injective. En effet, soient $(x_n, v_n) \neq (x'_n, v'_n) \in Tub(\frac{1}{n})$ et tels que $x_n + v_n = x'_n + v'_n$. Par compacité, on peut toujours supposer $x_n \to x$. Puisque $v_n \to 0$ et $v'_n \to 0$, on a aussi $x'_n \to x$. Par le théorème de la fonction réciproque, e est un difféomorphisme d'un voisinage V de $(x, 0)$ sur $e(V)$. Contradiction. $\square$

2.2 Un peu de théorie des fibrés

Soient G un groupe topologique, X un espace topologique et $\Phi : G \to \text{Homéo}(X)$ un morphisme de groupes. Si

$$\begin{array}{ccc} G \times X & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & \Phi(g)(x) \end{array}$$

est continue, on dit que G *agit* sur X, et si Φ est injective, on dit que l'action est *effective*.

nº **Définition.** – Soit G un groupe topologique agissant effectivement sur un espace F. *Un fibré E de base B de fibre F et de groupe structural G* est une application $p : E \to B$ et une collection d'homéomorphismes $\{\varphi_i : p^{-1}(\mathcal{U}_i) \to \mathcal{U}_i \times F,\ \mathcal{U}_i \text{ ouvert de } B\}$ (les cartes au dessus de $\mathcal{U}_i$) tels que :

1) Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(\mathcal{U}_i) \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "p"'] & & \mathcal{U}_i \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & \mathcal{U}_i & \end{tikzcd}$$

2) Tout point de B figure dans une carte.
3) Si $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ et φ est une carte, alors $\varphi_{|\mathcal{V}}$ est une carte de $\mathcal{V}$.
4) Les applications de changement de cartes sont de la forme :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times F & \longrightarrow & (\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times F \\ (x, f) & \longmapsto & (x, t_{ij}(x).f) \end{array}$$

où $t_{ij} : \mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j \to G$ (application de transition).

Quand la fibre est un espace vectoriel F de dimension q, on parle de *fibré vectoriel de rang* q, quand la fibre est G on parle de *fibré principal*.

Exemples. – 1) L'espace produit $M_1 \times M_2 \xrightarrow{\pi_1} M_1$, la fibre est M_2, le groupe structural est $G = \{id\}$.
2) Le ruban de Möbius $\mathbb{M}^2 \to \mathbb{S}^1$, la fibre est un segment $]-\epsilon, \epsilon[$, le groupe structural est $G = \{\pm id\} = \mathbb{Z}_2$.
3) La fibration de Hopf $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2^{-1}$, la fibre est $\mathbb{S}^1$, le groupe structural est $G = U(1)$.
4) Le fibré tangent (d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$) $TM \xrightarrow{p} M$, la fibre est $\mathbb{R}^m$, le groupe structural est $G = Gl(m, \mathbb{R})$.
5) Le fibré normal (d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$) $NM \xrightarrow{p} M$, la fibre est $\mathbb{R}^{n-m}$, le groupe structural est $G = Gl(n-m, \mathbb{R})$.
6) Le fibré des repères. Soit $FM = \{(x, v_1, \cdots, v_m) \in M \times T_xM \times \cdots \times T_xM \mid rg(v_1, \cdots, v_m) = m\}$, la projection naturelle $FM \overset{p}{\to} M$ est un fibré de fibre $Gl(m, \mathbb{R})$ et de groupe structural $G = Gl(m, \mathbb{R})$.
7) Un revêtement $\tilde{M} \to M$ avec M et $\tilde{M}$ connexe par arcs, la fibre est un espace discret et G s'identifie à un sous-groupe de $\pi_1(M)$.
8) Fibré des 1-jets $J^1(M, N) \to M \times N$, de fibre $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, de groupe structural $G = Gl(m, \mathbb{R}) \times Gl(n, \mathbb{R})$ (l'action est $(a, b).L = b^{-1} \circ L \circ a$)).

Fibré induit. – Soit $f : B' \to B$ et $p : E \to B$ un fibré de fibre F et de groupe structural G. On définit le *fibré induit* f^*E par :

$$f^*(E) = \{(b', e) \in B' \times E \mid p(e) = f(b')\} \xrightarrow{p'} B'.$$

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"'] \\ B' \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

et il est facile de vérifier que f^*E a pour fibre F est pour groupe structural G.

Isomorphisme de fibrés. – Un morphisme de fibrés est une paire d'applications $(\tilde{f}, f)$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"'] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

et telle que pour tout couple de cartes $\varphi : p^{-1}(\mathcal{U}) \times F$, $\varphi' : p^{-1}(\mathcal{U}') \to \mathcal{U}' \times F$ la composée :

$$\{b\} \times F \xrightarrow{\varphi^{-1}} p^{-1}(b) \xrightarrow{\tilde{f}} (p')^{-1}(f(b)) \xrightarrow{\varphi'} \{f(b)\} \times F$$

soit un homéomorphisme donnée par l'action d'un élément $\Psi_{\varphi,\varphi'}(b) \in G$. De plus $b \mapsto \Psi_{\varphi,\varphi'}(b)$ doit être continue sur $\mathcal{U} \cap f^{-1}(\mathcal{U}')$. Un morphisme $(\tilde{f}, f)$ est un isomorphisme si il admet un inverse $(\tilde{g}, g)$.

Théorème. – *Soient M une variété compacte (éventuellement à bord) et $E \to B$ un G-fibré. Si $f, g : M \to B$ sont homotopes alors f^*E et g^*E sont isomorphes.*

Définition. – Un espace B est *contractile* si l'identité de B est homotope à une application constante.

Les boules de $\mathbb{R}^n$ sont contractiles, plus généralement les parties convexes.

Théorème. – *Tout fibré sur une base contractile est trivial (isomorphe à un produit).*

n° Ce résultat est un corollaire du théorème précédent.

n° **Cas des fibrés vectoriels.** – Si E_1 et E_2 sont deux espaces vectoriels, on peut former $E_1 \oplus E_2$, $E_1 \otimes E_2$, E_2/E_1 (si $E_1 \subset E_2$), $\mathcal{L}(E_1, E_2) = E_1^* \otimes E_2$, etc. Toutes ces opérations se généralisent facilement au cas de fibrés $E_1 \to B$ et $E_2 \to B$ sur une même base.

2.3 Le fibré tangent

Nous avons donné une définition du fibré tangent d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Cette définition est fort peu intrinsèque mais elle peut suffire dans le cadre de ce cours à condition de savoir :

1) que toute variété M se plonge dans un espace $\mathbb{R}^n$ avec n assez grand,
2) que deux plongements $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}^n$ définissent des fibrés tangents isomorphes.

Voici cependant une définition intrinsèque. Soit $(M, \mathcal{A})$ une variété avec $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i \in I}\}$. Un vecteur est une classe d'équivalence $[x, i, v]$ de triplets $(x, i, v) \in M \times I \times \mathbb{R}^m$ sous la relation d'équivalence :

$$(x, i, v) \sim (y, j, w) \iff x = y \text{ et } d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}(v) = w.$$

L'ensemble de tous les vecteurs de M est l'espace tangent TM. Il est muni d'une projection :

$$\begin{array}{rccc} p : & TM & \longrightarrow & M \\ & [x,i,v] & \longmapsto & x. \end{array}$$

Des cartes sont données par :

$$\begin{array}{rcccl} T\varphi_i : & p^{-1}(\mathcal{U}_i) & \longrightarrow & \varphi_i(\mathcal{U}_i) \times \mathbb{R}^m & \simeq \mathcal{U}_i \times \mathbb{R}^m \\ & [x,i,v] & \longmapsto & (\varphi_i(x), v) & (x, d(\varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}(v)). \end{array}$$

d'où les changements de cartes :

$$\begin{array}{rccl} T\varphi_j \circ (T\varphi_i)^{-1} : & \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \times \mathbb{R}^m \\ & (x, v) & \longmapsto & (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x), d(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})_x(v)) \end{array}$$

qui sont des difféomorphismes. On munit TM de la topologie pour laquelle chaque $T\varphi_i$ est un homéomorphisme. On vérifie alors que $p : TM \to M$ est un fibré vectoriel de fibre $\mathbb{R}^m$ et de groupe structural $G = Gl(m, \mathbb{R})$.

Pour toute application $f : M \xrightarrow{C^1} N$, on a une application $df : TM \to TN$ définie au moyen de représentations locales :

$$\begin{array}{rccc} (df)_{ij} : & p_M^{-1}(\mathcal{U}_i) & \longrightarrow & p_N^{-1}(\mathcal{V}_i) \\ & [x, i, v] & \longmapsto & [f(x), j, d(\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}(v)] \end{array}$$

si $\mathcal{A}_M = \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}$ et $\mathcal{A}_N = \{(\mathcal{V}_i, \psi_i)\}$. Par construction df est un morphisme de fibrés vectoriels i. e. linéaire entre les fibres. En réalité cette construction est fonctorielle, en particulier :

$$d(f \circ g) = df \circ dg \text{ et } d(id_M) = id_{TM}.$$

Orientation. – Le groupe $Gl_+(m, \mathbb{R})$ agit de manière évidente sur les bases $\{(e_1, \cdots, e_m)\}$ de $\mathbb{R}^m$. Il y a deux orbites, une *orientation de* $\mathbb{R}^m$ est le choix de l'une d'entre elles, notée ω_0. Soit $p : E \to B$ un fibré vectoriel de rang m, une *orientation de* E est une famille $\{\omega_x\}_{x \in B}$ d'orientations des fibres $\{E_x\}_{x \in B}$ telle qu'il existe un atlas $\{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)\}$ de E dans lequel les restrictions sur les fibres $\varphi_x : (E_x, \omega_x) \to (\mathbb{R}^m, \omega_0)$ des cartes (au dessus des $\mathcal{U}_\rangle$) $\varphi_i : p^{-1}(\mathcal{U}_i) \to \mathcal{U}_\rangle \times \mathbb{R}^m$ préservent toujours les orientations. Une *orientation de* M est une orientation de $p : TM \to M$. Notons que si ω est une orientation de $E \to B$ et $f : B' \to B$ alors f^*E est naturellement orientée, on note $f^*\omega$ cette orientation.

Proposition. – *Toute variété simplement connexe est orientable.*

Démonstration. – L'idée est la suivante, on prend $x \in M$ et une orientation ω_x de T_xM, pour définir l'orientation ω_y de $y \in M$, on "pousse" ω_x le long d'un chemin joignant x à y. Afin que la construction ait un sens, il faut que ω_y ne dépende pas du chemin choisi, c'est là que l'hypothèse de simple connexité intervient. Plus précisément, soit $\gamma : [0, 1] \to M$ un chemin tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$, puisque la base est contractible, γ^*TM est trivial et donc orientable. Il existe une unique orientation θ^{γ^*TM} de γ^*TM telle que au dessus de $0 \in [0, 1]$, $\theta_0^{\gamma^*TM} = (\lambda^*\omega_x)_0$. On définit ω_y comme étant l'orientation de T_yM telle que au dessus de $1 \in [0, 1]$, $(\lambda^*\omega_y)_1 = \theta_1^{\gamma^*TM}$. On note $\omega_y = \lambda_\sharp\omega_x$. Il faut maintenant montrer que si $\delta : [0, 1] \to M$ est un autre chemin tel que $\delta(0) = x$ et $\delta(1) = y$, alors $\lambda_\sharp\omega_x = \delta_\sharp\omega_x$. Puisque M est simplement connexe, il existe une homotopie $h : [0, 1]^2 \to M$ telle que :

$$h(0, s) = x, \quad h(1, s) = y, \quad h(t, 0) = \gamma(t), \quad h(t, 1) = \delta(t).$$

Il est plus pratique de voir cette homotopie comme une application $h : D^2 = [0, 1]^2/\sim \to M$ où les seules classes non triviales de la relation $\sim$ sont $\{(0, s) \mid s \in [0, 1]\}$ et $\{(1, s) \mid s \in [0, 1]\}$. Comme D^2 est contractible, h^*TM est trivial donc orientable, il existe une unique orientation θ telle que :

$$\theta_{[(t,0)]} = \theta_t^{\gamma^*TM}, \quad \theta_{[(t,1)]} = \theta_t^{\delta^*TM}.$$

On a : $(\lambda^*(\lambda_\sharp\omega_x))_{[(1,s)]} = \theta_1^{\gamma^*TM} = \theta_{[(1,s)]}$ et $(\delta^*(\delta_\sharp\omega_x))_{[(1,s)]} = \theta_1^{\delta^*TM} = \theta_{[(1,s)]}$ donc $(\lambda^*(\lambda_\sharp\omega_x))_{[(1,s)]} = (\delta^*(\delta_\sharp\omega_x))_{[(1,s)]}$ mais :

$$(\lambda^*(\lambda_\sharp\omega_x))_{[(1,s)]} = (f^*(\lambda_\sharp\omega_x))_{[(1,s)]} \text{ et } (\delta^*(\delta_\sharp\omega_x))_{[(1,s)]} = (f^*(\delta_\sharp\omega_x))_{[(1,s)]}$$

d'où $\lambda_\sharp\omega_x = \delta_\sharp\omega_x$. Ainsi ω_y ne dépend pas du chemin choisi. On construit par ce procédé une orientation sur chaque composante connexe de M. $\square$

Proposition. – $\mathbb{R}P^{2n}$ *n'est pas orientable.*

Démonstration. – Supposons que ω soit une orientation de $\mathbb{R}P^{2n}$. On note $A : \mathbb{S}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{S}^{2n} \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ l'antipodie et $p : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{R}P^{2n}$ la projection. On peut définir une orientation θ de $\mathbb{S}^{2n}$ par la relation $dp_x(\theta_x) = \omega_{[x]}$. D'autre part $p \circ A = p$ implique :

$$dp_{-x}(A\theta_x) = dp_x(\theta_x), \quad (*).$$

Or $A\theta_x$ est l'une des orientations possibles i. e. $A\theta_x = \pm\theta_x$. Puisque $dp_{-x}(\theta_{-x}) = \omega_{[x]}$, il faut d'après $(*)$ que $A\theta_x = \theta_{-x}$; donc θ est invariante par l'antipodie. Ceci est impossible sur $\mathbb{S}^{2n}$ car :

$$A(x, e_1, \cdots, e_{2n}) = (-x, -e_1, \cdots, -e_{2n})$$

autrement dit, puisque $(-1)^{2n+1} = -1$, A renverse l'orientation. $\square$

Parallélisabilité. – L'orientabilité signifie que l'on peut suivre de manière cohérente un repère direct de M le long d'un lacet. Si on peut définir de manière cohérente un champ de repères directs sur tout M on dit que TM (ou M) est parallélisable. Plus précisément M est dite *parallélisable* si son fibré des repères FM admet une section (et dans ce cas FM est trivial, puisque FM est un fibré principal) ou de manière équivalente, si TM est trivialisable (isomorphe à $M \times \mathbb{R}^m$).

Exemples. – $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}^n$, tous les groupes de Lie.

On note $\epsilon : M \times \mathbb{R} \to M$ le fibré vectoriel trivial de rang 1. On dit que M est *stablement parallélisable* si $TM \oplus \epsilon$ est trivial.

Exemples. – $\mathbb{S}^n$, Σ_g.

On dit que M est *presque parallélisable* si $M \setminus \{\text{point}\}$ est parallélisable. On note P_m (resp. SP_m, resp. PP_m) l'ensemble des variétés parallélisables de dimension m (resp. stablement parallélisables, resp. presque parallélisables).

Proposition. – *On a :* $P_m \subset SP_m \subset PP_m \subset$ *Orientable*
De plus :
$SP_2 = PP_2 = \{$ *toutes les variétés orientables de dimension 2* $\}$.
$P_3 = SP_3 = PP_3 = \{$ *toutes les variétés orientables de dimension 3* $\}$.
$SP_4 \neq PP_4$.[1]

La preuve de cette proposition fait appel à des résultats de classification des fibrés. On l'admet.

2.4 Le fibré normal

Nous sommes maintenant en mesure de donner une définition intrinsèque du fibré normal d'une immersion. Notons d'abord que si $f : M \to N$ est une immersion alors

$$df(TM) = \{(x, df_x(v_x)) \in M \times TN \mid x \in M,\ v_x \in T_xM\} \subset f^*TN$$

est un sous-fibré vectoriel de rang m de f^*TN qui est isomorphe (via df) à TM.

Définition. – Soit $f : M \to N$ une immersion, le fibré

$$N(f) = (f^*TN)/df(TM)$$

[1] Par exemple, pour les connaisseurs, une K3-surface n'est pas stablement parallélisable mais elle est presque parallélisable.

est appelé le *fibré normal de* f.

On note $Tub(r) = \{(x, v) \in N_x(f) \mid |v| < r\}$ (on a muni N d'une métrique riemannienne arbitraire).

Théorème du voisinage tubulaire (cas général). – *Soit $f : M \to N$ un plongement de M compacte. Si $r > 0$ est suffisamment petit alors $\exp_{|Tub(r)}$ est un difféomorphisme sur son image $\mathcal{V}$, par conséquent $\mathcal{V}$ est un voisinage de M dans N dit voisinage tubulaire.*

On a noté *exp* l'application exponentielle $TN \to N$. La preuve de ce théorème est une adaptation facile de celle donnée en début de leçon pour le cas $N = \mathbb{R}^n$.

Une observation élémentaire mais importante est la suivante :

$$df(TM) \oplus N(f) \simeq f^*TN.$$

En effet, si on munit N d'une métrique riemannienne arbitraire, alors f^*TN se retrouve munit d'un produit scalaire dans chaque fibre par simple transport de structure. On note ν le fibré orthogonal à $df(TM)$ dans f^*TN, on a donc :

$$df(TM) \oplus \nu = f^*TN$$

et par conséquent ν est isomorphe à $N(f)$ et l'on a donc un isomorphisme entre $df(TM) \oplus N(f)$ et f^*TN.

Si $N = \mathbb{R}^n$, puisque $T\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ est trivial, $f^*T\mathbb{R}^n$ l'est aussi et par conséquent $df(TM) \oplus N(f)$ est trivial.

Proposition. – *a) M^m admet une immersion dans $\mathbb{R}^m \Rightarrow M^m$ est parallélisable.*
b) M^m orientable admet une immersion dans $\mathbb{R}^{m+1} \Rightarrow M^m$ est stablement parallélisable.

Démonstration. – a) est évident.
b) Puisque $f^*T\mathbb{R}^{m+1}$ est trivial, il est orientable, d'autre part TM est orientable par hypothèse, ceci implique que $N(f)$ est orientable. Or $N(f)$ est de rang 1, le choix d'une orientation donne donc une section partout non nulle de $N(f) \to M$, donc une trivialisation. Ainsi $N(f) \simeq \epsilon$, d'où la conclusion. □

2.5 Exercices

Exercice 1. – a) Soit $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i=1,2}\}$ l'atlas de $\mathbb{S}^2$ où $\mathcal{U}_1 = \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, $\mathcal{U}_2 = \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ et les φ_i sont des projections stéréographiques. Ecrire la fonction de transition t_{12} de $T\mathbb{S}^2$.
b) Montrer que sur $\mathbb{S}^2$ il n'existe pas de champ de vecteurs partout non nul. En déduire que $T\mathbb{S}^2$ n'est pas trivial.

Exercice 2. – Montrer qu'il existe une infinité de trivialisations non homotopes de $T\mathbb{T}^2$.

Exercice 3. – a) Montrer que $T^1\mathbb{S}^2 = \{v \in T\mathbb{S}^2 \mid |v| = 1\}$ est homéomorphe à $SO(3)$.
b) Montrer que $T^1\mathbb{S}^2$ est homéomorphe à $\mathbb{R}P^3$ (*Suggestion.* Tout élément de $SO(3)$ est une rotation autour d'un axe et d'autre part on peut voir $\mathbb{R}P^3$ comme $D^3/\sim$ où $\sim$ identifie les points antipodaux du bord de la 3-boule $\partial D^3 = \mathbb{S}^2$).

Exercice 4. – Montrer que $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{R}P^3$, $\mathbb{S}^7$ et $\mathbb{R}P^7$ sont parallélisables (*Suggestion.* Utiliser les quaternions et les octonions).

Exercice 5. – Montrer que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^n$ est trivialisable.

Exercice 6. – Soient $E = D^2 \times \mathbb{R}^n \to D^2$ le fibré vectoriel produit de rang n et $H \to \partial D^2$ un sous-fibré vectoriel de $E_{|\partial D^2} \to \partial D^2$ de rang $m < n$. On suppose que $H \to \partial D^2$ admet une trivialisation, peut-on prolonger $H \to \partial D^2$ en un sous-fibré vectoriel $\tilde{H} \to D^2$ de $E \to D^2$?

Exercice 7. – Montrer que TM est orientable.

Exercice 8. – Existe-t-il une immersion du ruban de Möbius $\mathbb{M}^2$ dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 9. – Soient M et N deux variétés stablement parallélisables. On suppose que M admet un champ de vecteurs partout non nul. Montrer que $M \times N$ est parallélisable. En déduire que $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^5$ est parallélisable.

Exercice 10. – a) Montrer que le produit $\mathbb{S}^{n_1} \times \mathbb{S}^{n_2}$ se plonge dans $\mathbb{R}^{n_1+n_2+1}$.
b) Montrer que tout produit de sphères $\mathbb{S}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_k}$ se plonge dans $\mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_k+1}$.

Chapitre 3

Petit nécessaire de théorie homotopique

3.1 Type d'homotopie, groupes d'homotopie

3.1.1 Type d'homotopie

Définition. – Deux applications continues $f_0, f_1 : X \to Y$ sont *homotopes* si il existe une application continue $F : X \times [0,1] \to Y$, $F_s(x) = F(x,s)$, telle que $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$. On note alors $f_0 \approx f_1$.

Définition. – Soient X, Y deux espaces topologiques, une application $f : X \to Y$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe une application $g : Y \to X$ telle que $f \circ g \approx id_X$ et $g \circ f \approx id_Y$. On dit alors que g est un *inverse homotopique* de f et que X et Y sont *homotopiquement équivalents,* on note $X \approx Y$.

Bien sûr $\approx$ est une relation d'équivalence.

Définition. – Un espace X est dit *contractile* si $X \approx \{pt\}$, ou, de manière équivalente, si id_X est homotope à l'application constante $e : X \to \{pt\} \subset X$.

Définition. – Un espace $A \subset X$ est un *rétract par déformation au sens fort* de X si il existe une homotopie $F : X \times [0,1] \to X$, appelée la *déformation*, telle que :

1) $F(x,0) = x$,
2) $F(x,1) \in A$,
3) $F(x,t) = x$, si $x \in A$, $0 \leq t \leq 1$.

Si l'on exige que la condition 3) soit satisfaite seulement pour $t = 1$, on dit alors que A est un *retract par déformation.* Par définition, si A est un rétract par déformation de X, alors $A \approx X$.

Exemple 1. – $\mathbb{R}^n \approx \{0\}$. Soient $i : \{0\} \to \mathbb{R}^n$ l'inclusion et $r : \mathbb{R}^n \to \{0\}$ l'application constante, alors $r \circ i = id_{\{0\}}$ et $i \circ r \approx id_{\mathbb{R}^n}$ par $F_t = t id_{\mathbb{R}^n}$.

Exemple 2. – $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \approx \mathbb{S}^{n-1}$. Soient $i : \mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ l'inclusion et $r : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$, $x \mapsto x/|x|$, alors $r \circ i = id_{\mathbb{S}^{n-1}}$ et $i \circ r \approx id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$ par l'homotopie $F_t = (1-t)i + tr$.

n° **Exemple 3.** – $\mathbb{R}^3 \setminus$ Droite $\approx \mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{pt\} \approx \mathbb{S}^1$, $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, ..., p_k\} \approx \vee_{i=1}^k \mathbb{S}^1$.

Exemple 4. – Tout groupe de Lie (de dimension finie) se rétracte par déformation sur un sous-groupe de Lie compact, en particulier : $Gl(n,\mathbb{R}) \approx O(n)$, $Gl_+(n,\mathbb{R}) \approx SO(n)$, $Gl(n,\mathbb{C}) \approx U(n)$.

3.1.2 Groupes d'homotopie

Rappelons que l'on note $\pi_0(X)$ l'ensemble des composantes connexes par arcs de X. Soient $n \geq 1$ et $x_0 \in X$, on pose :

$$\pi_n(X, x_0) = \pi_0(C^0(I^n, \partial I^n, X, x_0)),$$

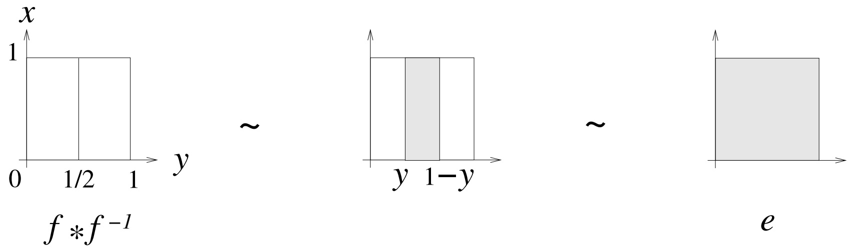
où $C^0(X, A, Y, B) = \{f \in C^0(X, Y) \mid f(A) \subset B\}$.

Proposition. – *Si $n \geq 1$, l'ensemble $\pi_n(X, x_0)$ est un groupe, il est abélien si $n \geq 2$.*

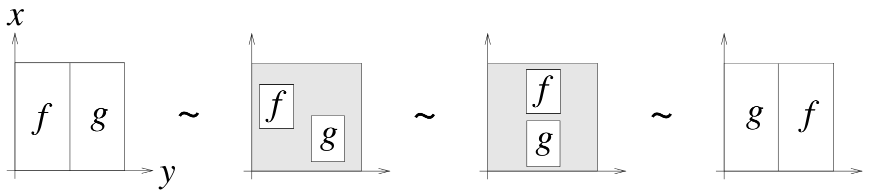
Démonstration. – On note $(x, y) \in I^{n-1} \times I$, la loi est celle de la concaténation :

$$f_1 * f_2(x, y) = \begin{cases} f_1(x, 2y) & \text{si } y \leq 1/2, \\ f_2(x, 2y-1) & \text{si } y \geq 1/2. \end{cases}$$

L'élément neutre est l'application constante $e : I^n \to \{x_0\}$. L'examen du dessin ci-dessous montre que l'inverse de $(x, y) \mapsto f(x, y)$ est $(x, y) \mapsto f(x, 1-y)$.



n° L'associativité est évidente, pour $n \geq 2$ la commutativité résulte de l'examen des quatre dessins ci-dessous.



□

Le groupe $\pi_n(X, x_0)$ est appelé le n-ième groupe d'homotopie de X basé en x_0. Toute application $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induit une flèche $\pi_n f : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ par composition $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0) \mapsto [f \circ \alpha] \in \pi_n(Y, y_0)$. Il est facile de vérifier que cette flèche est un morphisme de groupes. D'autre part $\pi_n(f \circ g) = \pi_n f \circ \pi_n g$ et $\pi_n id_X = id_{\pi_n(X,x_0)}$, autrement dit π_n est un foncteur covariant. Bien sûr, si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ est une équivalence d'homotopie, alors $\pi_n f$ est un isomorphisme de groupes. Réciproquement, une application continue $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ qui induit un isomorphisme de groupes $\pi_n f : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ pour tout $n \geq 1$ et une bijection pour $n = 0$, est appelée une *équivalence d'homotopie faible.* Il existe une catégorie importante d'espaces topologiques pour laquelle les équivalences d'homotopie faibles sont des équivalences d'homotopie, ce sont les CW-complexes.

3.1.3 CW-complexes

Définition. – Un *CW-complexe* est une union dénombrable $X = \cup X^{(n)}$ où :

1) $X^{(0)}$ est un ensemble discret de points (les 0-cellules).

2) $X^{(n)}$ s'obtient à partir de $X^{(n-1)}$ en "attachant" des disques $\{D^n_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (les n-cellules) le long de leurs bords. Précisément, il existe un ensemble d'applications $f_\alpha : \partial D^n_\alpha \to X^{(n-1)}$ et

$$X^{(n)} = X^{(n-1)} \coprod_{\alpha\in A} D^n_\alpha/(f_\alpha(x) \sim x).$$

On met, bien entendu, sur $X^{(n)}$ la topologie quotient.

3) X est muni de la topologie faible i. e. $\mathcal{U} \subset X$ est ouvert si pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{U} \cap X^{(n)}$ est ouvert (et donc F est fermé si pour tout $n \geq 0$, $F \cap X^{(n)}$ est fermé).

La borne supérieure des dimensions des cellules est la *dimension* du CW-complexe, les espaces $X^{(n)}$ sont les *n-squelettes*. On montre facilement que chaque cellule de X est contenue dans un sous-complexe *fini* de X. Cette propriété est à l'origine du C=closure finite de CW, le W provient de Weak topologie = topologie faible.

Exemple 1. – Tout graphe est un CW-complexe de dimension 1.

Exemple 2. – Un CW-complexe ayant une 0-cellule et une n-cellule et dont l'application d'attachement est l'application constante $e : \mathbb{S}^{n-1} \to 0 - cellule$ est homéomorphe à une sphère $\mathbb{S}^n$.

Exemple 3. – Voici une autre façon de voir $\mathbb{S}^2$ comme un CW-complexe. Prendre $X_0 = \{N\} \cup \{S\}$, attacher deux 1-cellules pour obtenir $X^{(1)}$ = un équateur, puis attacher deux 2-cellules pour obtenir les deux hémisphères.

Exemple 4. – Un structure CW sur $\mathbb{T}^2$ s'obtient en prenant $X^{(0)} = \{pt\}$, $X^{(1)}$ = une latitude α et une longitude β s'intersectant en $X^{(0)}$, puis on attache une 2-cellule selon $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$.

Exemple 5. – Toute triangulation sur une variété fournit une structure CW sur la variété.

Exemple 6. – Le CW-complexe ayant une 0-cellule et k n-cellules et dont les applications d'attachement sont toutes constantes est homéomorphe au bouquet de sphères $\vee_{i=1}^k \mathbb{S}^n$.

Théorème de Whitehead (1948). – *Soient X et Y deux CW-complexes et $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ une équivalence d'homotopie faible, alors f est une équivalence d'homotopie.*

On admet ce résultat, mentionnons également que tout espace topologique Y admet une approximation CW, c'est-à-dire qu'il existe un CW-complexe X et une équivalence d'homotopie faible $f : X \to Y$.

3.1.4 Calcul des groupes d'homotopie

En général, il s'agit d'une tâche hautement non triviale. A l'heure actuelle, on ne connaît toujours pas tous les groupes d'homotopie des sphères, il est certes facile de montrer que $\pi_k(\mathbb{S}^n) = 0$ si $k < n$ et $\pi_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$, en revanche les choses deviennent ardues pour $\pi_{n+k}(\mathbb{S}^n)$, $k > 0$ (l'exercice 3 propose d'établir que $\pi_3(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$). Pour un espace topologique quelconque, le calcul est parfois facilité si l'on dispose d'un fibré $F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} B$. En effet, contrairement à l'homologie, on a une suite exacte longue :

$$\to \pi_n(F) \to \pi_n(X) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \cdots \to \pi_0(F) \xrightarrow{i_\sharp} \pi_0(X) \xrightarrow{p_\sharp} \pi_0(B).$$

(L'exactitude au niveau du π_0 signifie que l'image de la flèche à gauche est l'image réciproque de la composante contenant le point base de la flèche à droite). Une application directe de cette suite exacte montre que si $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ est un recouvrement d'un espace connexe X, alors $\pi_n(\tilde{X}) \to \pi_n(X)$ est injective si $n = 1$ et un isomorphisme si $n \geq 2$.

Exemple 1. – La fibration $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ permet d'obtenir : $\pi_1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{Z}^n$, $\pi_k(\mathbb{T}^n) = 0$ si $k > 1$. Le cas $n = 1$ donne tous les groupes d'homotopie de $\mathbb{S}^1$.

Exemple 2. – La fibration de Hopf : $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ permet d'obtenir $\pi_{3+k}(\mathbb{S}^3) = \pi_{3+k}(\mathbb{S}^2)$ pour tout $k \geq 0$, en particulier $k = 0$ donne $\pi_3(\mathbb{S}^2) = \pi_3(\mathbb{S}^3) = \mathbb{Z}$.

3.2 Classification des applications

3.2.1 Homotopie libre, homotopie basée

Soient X, Y deux espaces topologiques, on note :

$$[X,Y]_0 = \pi_0(C^0((X,x_0),(Y,y_0))), \quad [X,Y] = \pi_0(C^0(X,Y)).$$

En particulier $\pi_n(Y,y_0) = [\mathbb{S}^n, Y]_0$.

Définition. – Soit $x_0 \in X$ un point base et soient $u : [0,1] \to Y$, $f_0, f_1 : X \to Y$, on dit que f_0 est *librement homotope à f_1 le long de u*, si il existe une homotopie $F : X \times [0,1] \to Y$ telle que $F(.,0) = f_0$, $F(.,1) = f_1$, $F(x_0,t) = u(t)$. On note $f_0 \simeq_u f_1$.

Supposons $u(0) = u(1) = y_0$ i. e. $[u] \in \pi_1(Y,y_0)$. On définit une action du $\pi_1(Y,y_0)$ sur $[X,Y]_0$ en posant $[u][f_0]_0 := [f_1]_0$ où f_1 est n'importe quelle application telle que $f_0 \simeq_u f_1$. Les propriétés suivantes (admises) montrent que cette action est bien définie :

P1.– (Existence) Soient $f_0 : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ et $u : [0,1] \to Y$ avec $u(0) = y_0$, alors il existe $f_1 : X \to Y$ telle que $f_0 \simeq_u f_1$.

P2.– (Unicité) Soient $f_0 \simeq_u f_1$, $f_0 \simeq_v f_2$, $u \simeq v$ (rel ∂I), alors $f_1 \simeq_{const \equiv u(1) \equiv v(1)} f_2$.

P3.– (Multiplicativité) $f_0 \simeq_u f_1$, $f_1 \simeq_u f_2 \Rightarrow f_0 \simeq_u f_2$.

Théorème. – *Si Y est connexe par arcs : $[X,Y]_0/\pi_1(Y,y_0) = [X,Y]$.*

En particulier, si Y est simplement connexe, le foncteur d'oubli $[X,Y]_0 \to [X,Y]$ est bijectif. ce théorème dit aussi que le $\pi_1(Y,y_0)$ agit sur le $\pi_n(Y,y_0)$ et que le quotient est $[\mathbb{S}^n, Y]$.

Démonstration. – L'inclusion $C^0((X,x_0),(Y,y_0)) \subset C^0(X,Y)$ induit une application, dite "d'oubli", au niveau du π_0 : $\Phi : [X,Y]_0 \to [X,Y]$. Il est clair que $\Phi([u][f]_0) = \Phi([f]_0)$ donc Φ passe au quotient.
D'autre part $\Phi([f_0]_0) = \Phi([f_1]_0)$ implique qu'il existe $u : I \to Y$ tel que $f_0 \simeq_u f_1$, i. e. $[f_1]_0 = [u][f_0]_0$ et Φ est injective.
Soit $[g] \in [X,Y]$, on note $y_1 = g(x_0)$. Puisque Y est connexe par arcs, il existe $u : [0,1] \to Y$ tel que $u(0) = y_1$, $u(1) = y_0$, d'après P1 il existe $f : (X,x_0) \to (Y,y_0)$ tel que $f \simeq_u g$ donc $[f] = [g]$ i.

e. $\Phi([f_0]_0) = [g]$. □

Définition. – On dit que Y est *n-simple* si pour tout point base $y_0 \in Y$, le $\pi_1(Y, y_0)$ agit trivialement sur $\pi_n(Y, y_0)$. L'espace Y est *simple* si il est n-simple pour tout n.

Exemple 1. – Tout espace simplement connexe est n-simple.

Exemple 2. – L'action du $\pi_1(Y)$ sur lui-même est donnée par la conjugaison : $\alpha(\beta) = \alpha\beta\alpha^{-1}$, ainsi un espace est 1-simple si et seulement si $\pi_1(Y, y_0)$ est abélien pour tout $y_0 \in Y$.

3.2.2 Classe fondamentale d'un CW-complexe

On suppose désormais que Y est connexe par arcs, en particulier si $(y_0, y_1) \in Y^2$, $\pi_k(Y, y_0)$ et $\pi_k(Y, y_1)$ sont isomorphes, on ne mentionnera donc plus le point base.

Définition. – On dit que Y est *n-connexe* si $\pi_k(Y) = 0$ pour tout $k \leq n$.

Soit $\rho : \pi_n(Y) \to H_n(Y, \mathbb{Z})$ l'application naturelle définie par $\rho([f]) = f_*[\mathbb{S}^n]$ où $[\mathbb{S}^n]$ représente le générateur de $H_n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z})$ (donné par l'orientation). En général, cette application n'est ni injective ni surjective, on a néanmoins le résultat suivant.

Théorème d'Hurewicz ($\sim$ 1935). – *L'application ρ est un morphisme de groupes. Pour $n = 1$, $\rho : \pi_1(Y)/[\pi_1(Y), \pi_1(Y)] \longrightarrow H_1(Y, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme et si Y est n-connexe, $n \geq 1$, $\rho : \pi_k(Y) \to H_k(Y, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour tout $1 \leq k \leq n + 1$.*

On note désormais n le plus grand entier pour lequel Y soit $(n-1)$-connexe. Le théorème des cœfficients universels permet d'écrire une suite d'isomorphis-mes naturels :

$$Hom(\pi_n(Y), \pi_n(Y)) \overset{\rho}{\simeq} Hom(H_n(Y, \mathbb{Z}), \pi_n(Y)) \overset{C.U.}{\simeq} H^n(Y, \pi_n(Y)).$$

L'image de l'$id \in Hom(\pi_n(Y), \pi_n(Y))$ dans $H^n(Y, \pi_n(Y))$ par ces isomorphismes est notée $\Delta(Y)$.

Définition. – Soit n le plus grand entier pour lequel Y soit $(n-1)$-connexe. La classe $\Delta(Y) \in H^n(Y, \pi_n(Y))$ est appelée la *classe fondamentale* de Y.

Exemples. – $\Delta(\mathbb{S}^n) = [\mathbb{S}^n]$, $\Delta(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) = [\mathbb{S}^n \times \{*\}] + [\{*\} \times \mathbb{S}^n]$.

3.2.3 Théorème de Hopf et sa généralisation

Le théorème de Hopf permet de classer les applications d'un CW-complexe dans $\mathbb{S}^n$ à condition que la dimension du CW-complexe soit inférieure ou égale à n.

Théorème de Hopf. – *Soit X un CW-complexe. On suppose que $\dim X \leq n$ ou que $n = 1$, alors :*

$$\begin{array}{ccc} [X, \mathbb{S}^n] & \longrightarrow & H^n(X, \mathbb{Z}) \\ [f] & \longmapsto & f^*[\mathbb{S}^n] \end{array}$$

est une bijection.

La théorie de l'obstruction permet d'obtenir la généralisation suivante.

Théorème de classification des applications. – *On note n le plus grand entier pour lequel Y est $(n-1)$-connexe. Soit X un CW-complexe tel que :*

$$\begin{array}{ll} \forall i > n & H^{i+1}(X, \pi_i(Y)) = 0, \\ \forall i > n & H^i(X, \pi_i(Y)) = 0, \end{array}$$

alors :

$$\begin{array}{ccc} [X, Y] & \longrightarrow & H^n(X, \pi_n(Y)) \\ [f] & \longmapsto & f^*\Delta(Y) \end{array}$$

est une bijection.

3.3 Appendice : Homologie et cohomologie

3.3.1 Homologie singulière

On appelle *q-simplexe*, l'ensemble :

$$\Delta^q = \{(t_0, ..., t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid \sum t_i = 1,\ t_i \geq 0\}.$$

Les fonctions :

$$\begin{array}{cccc} f_m^q : & \Delta^{q-1} & \longrightarrow & \Delta^q \\ & (t_0, ..., t_{q-1}) & \longmapsto & (t_0, ..., t_{m-1}, 0, t_m, ..., t_{q-1}) \end{array}$$

sont appelées les *applications de face.*

Définition. – Soit X un espace topologique. Un *q-simplexe singulier* de X est une application (continue) $\sigma : \Delta^q \to X$.

On note $S_q(X, \mathbb{Z})$ le $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les q-simplexes singuliers $\{\sigma : \Delta^q \to X\}$. Un élément de $S_q(X, \mathbb{Z})$ s'écrit donc comme une somme formelle (finie) :

$$\sum_i a_i \sigma_i$$

où $a_i \in \mathbb{Z}$, $\sigma_i \in C^0(\Delta^q, X)$. On définit une application "bord" $\partial_q : S_q(X, \mathbb{Z}) \to S_{q-1}(X, \mathbb{Z})$ par :

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{m=0}^{q} (-1)^m \sigma \circ f_m^q.$$

On vérifie facilement que $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$. Le *$q$-ième groupe d'homologie de X à cœfficients dans $\mathbb{Z}$* est le quotient :

$$H_q(X, \mathbb{Z}) = ker\ \partial_q / im\ \partial_{q+1}.$$

Une application $f : X \to Y$ induit une application :

$$\begin{array}{cccc} f_* : & S_q(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & S_q(Y, \mathbb{Z}) \\ & \sigma & \longmapsto & f \circ \sigma \end{array}$$

et induit un morphisme (de $\mathbb{Z}$-modules) :

$$f_* = H_q(f) : H_q(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_q(Y, \mathbb{Z}).$$

On a de plus $H_q(f \circ g) = H_q(f) \circ H_q(g)$ et $H_q(id_X) = id_{H_q(X,\mathbb{Z})}$, autrement dit, H_q est un foncteur covariant.

3.3.2 Cohomologie singulière

On pose $S^q(X,\mathbb{Z}) = Hom_{\mathbb{Z}}(S_q(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ et $d_q : S^q(X,\mathbb{Z}) \to S^{q+1}(X,\mathbb{Z})$ défini par : $(d_q\alpha)(\sigma) = \alpha(\partial_{q+1}\sigma)$. Le *$q$-ième groupe de cohomologie de X à cœfficients dans $\mathbb{Z}$* est le quotient :

$$H^q(X,\mathbb{Z}) = ker\ d_q/im\ d_{q-1}.$$

Une application $f : X \to Y$ induit une application : $f^* : S_q(Y,\mathbb{Z}) \longrightarrow S_q(X,\mathbb{Z})$ par $(f^*\alpha)(\sigma) = \alpha(f\circ\sigma)$. Cette derniere application passe au quotient et induit un morphisme :

$$f^* = H^q(f) : H^q(Y,\mathbb{Z}) \to H^q(X,\mathbb{Z}).$$

On vérifie que H^q est un foncteur contravariant, i. e. $H^q(f\circ g) = H^q(g)\circ H^q(f)$ et $H^q(id_X) = id_{H^q(X,\mathbb{Z})}$.

3.3.3 Théorème des coefficients universels

Dans la construction de l'homologie et de la cohomologie, on peut remplacer le groupe des cœfficients $\mathbb{Z}$ par n'importe quel groupe abélien G et obtenir ainsi d'autres groupes de d'homologie et de cohomologie, notés $H_q(X,G)$ et $H^q(X,G)$. En général – et même si $G=\mathbb{Z}$ – $H^q(X,G)$ n'est pas $Hom_{\mathbb{Z}}(H_q(X,\mathbb{Z}),G)$, néanmoins, il y a un morphisme naturel $\beta : H^q(X,G) \to Hom_{\mathbb{Z}}(H_q(X,\mathbb{Z}),G)$ donné par : $\beta([\alpha])([\sigma]) = \alpha(\sigma)$.

Théorème des coefficients universels. – *On a une suite exacte :*

$$0 \longrightarrow Ext(H_{q-1}(X,\mathbb{Z}),G) \to H^q(X,G) \xrightarrow{\beta} Hom_{\mathbb{Z}}(H_q(X,\mathbb{Z}),G) \to 0.$$

Ainsi β est surjective et son noyau est le groupe abélien $Ext(H_{q-1}(X,\mathbb{Z}),G)$. Voici quelques valeurs utiles pour $Ext(.,.)$:

$$Ext(\mathbb{Z},G)=0,\ Ext(\mathbb{Z}_n,G)=G/nG,\ Ext(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_n,\ Ext(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z}_m)=\mathbb{Z}_d$$

avec $d = pgcd(n,m)$.

3.3.4 Quelques groupes d'homologie

Tout d'abord une propriété importante : les homologies et cohomologies singulières de deux espaces homotopiquement équivalents sont isomorphes.

Si X est contractile :

$$H_q(X,G) = H^q(X,G) = \begin{cases} G & \text{si } q=0, \\ 0 & \text{si } q>0 \end{cases}$$

Si M est une variété de dimension m alors :

$$H_q(M,G) = H^q(M,G) = 0, \quad \text{si } q<0 \text{ ou } q>m.$$

Si M est connexe :

$$H_0(M,G) = H^0(M,G) = G.$$

Si M est compacte et orientable :

$$H_m(M,G) = H^m(M,G) = G$$

de plus, pour tout $0 \geq q \geq m$, $H_q(M,G) = H^{m-q}(M,G)$.

Si M est compacte et non orientable :

$$H_m(M, G) = {}_2G = \{a \in G \mid 2a = 0\},\ H^m(M, G) = G/2G.$$

Si M est non compacte :

$$H_m(M, G) = H^m(M, G) = 0.$$

Exemple 1. – La sphère $\mathbb{S}^m$.

$$H_q(\mathbb{S}^m, \mathbb{Z}) = H^q(\mathbb{S}^m, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < q < m, \\ \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \text{ ou } q = m. \end{cases}$$

Exemple 2. – Le tore $\mathbb{T}^2$.

$$H_q(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = H^q(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \text{ ou } q = 2, \\ \mathbb{Z}^2 & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

Exemple 3. – L'espace projectif $\mathbb{R}P^m$.

$$H_q(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \text{ ou } q = m \text{ et } m \text{ impair}, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } q \text{ impair}, 1 \le q \le m-1, \\ 0 & \text{si } q \text{ pair}, 2 \le q \le m. \end{cases}$$

$$H^q(\mathbb{R}P^m, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \text{ ou } q = m \text{ et } m \text{ impair}, \\ 0 & \text{si } q \text{ impair}, 1 \le q \le m-1, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } q \text{ pair}, 2 \le q \le m. \end{cases}$$

3.4 Exercices

Exercice. 1. – Construire un CW-complexe de dimension 1 homotopiquement équivalent à $\mathbb{R}^3 \setminus (D_1 \cup D_2)$ où D_1 et D_2 sont deux droites :

a) disjointes,

b) ayant un point commun.

Exercice. 2. – Pour montrer que deux espaces X_0, X_1 sont homotopiquement équivalents il est parfois commode d'introduire un troisième espace W contenant X_0 et X_1 et de montrer que les inclusions $X_0 \subset W$ et $X_1 \subset W$ sont des équivalences d'homotopie, et donc par transitivité $X_0 \approx X_1$. Utiliser ceci pour montrer que :

a) $\mathbb{S}^1 \cup I \approx \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ (les extrémités de I sont attachées à deux points distincts de $\mathbb{S}^1$),

b) $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1 \approx \mathbb{S}^2/\{N, S\}$ la sphère pincée,

c) $\mathbb{S}^2 \approx \mathbb{T}^2 \cup (D_1 \cup D_2)$ où D_1 est attachée à $\mathbb{T}^2$ le long d'un équateur et D_2 le long d'une latitude.

Exercice. 3. – Décrire une structure de CW-complexe pour $\mathbb{R}P^2$ comportant une cellule dans chaque dimension 0,1,2.

Exercice. 4. – Calculer $\pi_k(\mathbb{R}P^3)$ pour $k = 0, ..., 3$. En déduire que $\pi_3(\mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$ (on rappelle que $T^1\mathbb{S}^2$ est difféomorphe à $\mathbb{R}P^3$).

Exercice. 5. – Montrer que la variété de Stiefel $V_{n,k}$ est $(n-k-1)$-connexe. En déduire que $\pi_1(G^{or}_{2m,m}) = 0$ si $m \ge 2$.

Exercice. 6. – Soit $n \ge 2$ et $X = (\mathbb{S}^2 \times [0,1])/\sim$ où $(x, 0) \sim (Tx, 1)$ avec $T : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ la réflexion de $\mathbb{S}^n$ à travers $\mathbb{S}^{n-1}$. Montrer que X n'est pas n-simple.

Exercice. 7. – Déterminer $[\mathbb{R}P^3, \mathbb{T}^2]$ et $[\mathbb{T}^2, \mathbb{R}P^3]$.

Chapitre 4

Le h-principe

4.1 Relation différentielle

Définition. – Tout sous-ensemble $\mathcal{R} \subset J^1(M,N)$ est appelé une *relation différentielle.*

Dans ce cours, on ne considère que des relations différentielles $\mathcal{R} \subset J^1(M,N)$ qui sont des espaces total de fibrés sur $M \times N$. On a donc une projection $p : \mathcal{R} \to M \times N$ et des fibres $\mathcal{R}_{x,y} = p^{-1}(x,y) \in \mathcal{L}(T_xM, T_yN)$.

Exemple 1. – $M = \mathbb{S}^1$, $N = \mathbb{R}^2$, $J^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2)^*$. Une application $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ est une immersion si et seulement si $\gamma' \neq 0$, i. e., pour tout $x \in \mathbb{S}^1$:

$$j^1\gamma(x) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) =: \mathcal{I}.$$

L'espace $\mathcal{I}$ fibre trivialement sur $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$, c'est une relation différentielle dite *des immersions de* $\mathbb{S}^1$ *dans* $\mathbb{R}^2$.

Exemple 2. – Soit $\mathcal{I} = \cup_{(x,y)\in M\times N} \mathcal{I}_{x,y} \subset J^1(M,N)$ avec :

$$\mathcal{I}_{x,y} = Mono(T_xM, T_yN).$$

L'espace $\mathcal{I}$ fibre sur $M \times N$, la fibre au dessus de (x,y) étant $\mathcal{I}_{x,y}$. Bien sûr, $f : M \to N$ est une immersion si et seulement si $j^1f \in \Gamma(\mathcal{I})$ et l'espace $\mathcal{I}$ est appelé la *relation différentielle des immersions de* M *dans* N.

Exemple 3. – Immersions dont l'application de Gauss est contrainte. Soit $A \subset Gr_{n,m}$ un sous-ensemble de la grassmannienne des m-plans de $\mathbb{R}^n$. On pose $\mathcal{R}_A = \cup_{(x,y)\in M\times\mathbb{R}^n} \mathcal{R}_{x,y} \subset J^1(M,\mathbb{R}^n)$ où

$$\mathcal{R}_{x,y} = \{L \in \mathcal{L}(T_xM, \mathbb{R}^n) \mid L(T_xM) \in A\}.$$

Une application $f : M \to \mathbb{R}^n$ est une immersion dont l'application de Gauss $G : M \to Gr_{n,m}$ est à valeur dans A si et seulement si $j^1f \in \Gamma(\mathcal{R}_A)$. En particulier, si $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2m} = \mathbb{C}^m$ et :

$A_{\mathbb{C}} = \{\Pi \in Gr_{2m,m} \mid i\Pi = \Pi\}$ alors $\mathcal{R}_{A_{\mathbb{C}}}$ est la relation différentielle des immersions *complexes*,

$A_{Lag} = \{\Pi \in Gr_{2m,m} \mid i\Pi \perp \Pi\}$ alors $\mathcal{R}_{A_{Lag}}$ est la relation différentielle des immersions *lagrangiennes*,

$A_{TR} = \{\Pi \in Gr_{2m,m} \mid i\Pi \cap \Pi = \{0\}\}$ alors $\mathcal{R}_{A_{TR}}$ est la relation différentielle des immersions *totalement réelles.*

Exemple 4. – Immersions isométriques. Soient (M,g) et (N,h) deux variétés riemanniennes. On pose $\mathcal{I}_{iso} = \cup_{(x,y)\in M\times N}\mathcal{I}_{iso}(x,y)$ avec :

$$\mathcal{I}_{iso}(x,y) = MonoIso((T_xM, g_x), (T_yN, h_y)).$$

Alors $f : (M,g) \to (N,h)$ est isométrique si et seulement si $j^1f \in \Gamma(\mathcal{I}_{iso})$.

Définition. – Une *solution* d'une relation différentielle $\mathcal{R} \subset J^1(M,N)$ est une application $f : M \to N$ telle que $j^1f \in \Gamma(\mathcal{R})$.

On note $\mathcal{S}ol(\mathcal{R})$ l'espace des solutions de $\mathcal{R}$ (muni de la topologie induite par celle de $C^1(M,N)$) et $\Gamma(\mathcal{R})$ l'espace des sections de $\mathcal{R}$. On a une application :

$$\begin{array}{rccc} J: & \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathcal{R}) \\ & f & \mapsto & j^1f. \end{array}$$

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R}$ satisfait au *h-principe* si pour toute section $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$, il existe une homotopie de sections $\sigma_t \in \Gamma(\mathcal{R})$ telle que $\sigma_0 = \sigma$ et $\sigma_1 \in J(\mathcal{S}ol(\mathcal{R}))$ (i. e. il existe $f : M \to N$ telle que $j^1f = \sigma_1 \in \Gamma(\mathcal{R})$).

Cette définition équivaut à demander que l'application J induise une surjection au niveau du π_0 : $\pi_0(J) : \pi_0(\mathcal{S}ol(\mathcal{R})) \to \pi_0(\Gamma(\mathcal{R}))$.

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R}$ satisfait au *h-principe 1-paramétrique* si $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe et si pour toute famille de sections $\sigma_t \in \Gamma(\mathcal{R})$ telle que $\sigma_0 = j^1f_0$ et $\sigma_1 = j^1f_1$, il existe une homotopie $H : [0,1]^2 \to \Gamma(\mathcal{R})$ telle que :

$$H(0,t) = \sigma_t,\ H(s,0) = \sigma_0,\ H(s,1) = \sigma_1,\ \text{et } H(1,t) = j^1f_t.$$

Cette définition équivaut à demander que le groupe $\pi_1(\Gamma(\mathcal{R}), \mathcal{S}ol(\mathcal{R}))$ soit trivial. Ceci implique que l'application J induit une bijection au niveau du π_0 : $\pi_0(J) : \pi_0(\mathcal{S}ol(\mathcal{R})) \xrightarrow{\simeq} \pi_0(\Gamma(\mathcal{R}))$.

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R}$ satisfait au *h-principe paramétrique* si $J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \to \Gamma(\mathcal{R})$ est une équivalence d'homotopie faible.

Notons que si M est compacte, $J^1(M,N)$ est métrisable, par conséquent une équivalence d'homotopie faible est une équivalence d'homotopie.

Exemple. – Les propositions qui permettent de démontrer le théorème de Whitney-Graustein montrent que la relation différentielle des immersions de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^2$ satisfait au h-principe 1-paramétrique. Il n'est pas difficile, avec les mêmes idées, de montrer que cette relation différentielle satisfait en réalité au h-principe paramétrique.

4.2 Les théorèmes de Gromov

Action de $Diff(M)$ sur $J^1(M,N)$. – Soit $\varphi \in Diff(M)$, alors φ agit sur $J^1(M,N)$ par :

$$\varphi_*(x,y,L) = (\varphi(x), y, L \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}).$$

Si f est telle que $j^1f(x) = (x,y,L)$ alors :

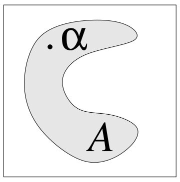
$$\varphi_*(j^1f(x)) = (\varphi(x), f(x), df_x \circ d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}) = j^1(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)).$$

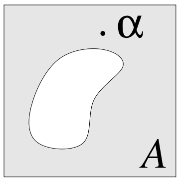
Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R}$ est $Diff(M)$-*invariante* si pour tout $\varphi \in Diff(M)$, $\varphi_*(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

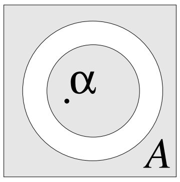
Parmi toutes les relations vues précédemment, seule la relation différentielle $\mathcal{I}$ des immersions est $Diff(M)$-invariante.

Amplitude d'une partie de $\mathbb{R}^n$. – Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on note $Conv(A, \alpha)$ l'enveloppe convexe de la composante connexe de A qui contient α.

Définition. – Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est *ample* si pour tout $\alpha \in A$ on a : $Conv(A, \alpha) = \mathbb{R}^n$. En particulier $A = \emptyset$ est ample.







A n'est pas ample, A est ample, A n'est pas ample.

Exemple. – Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, l'espace complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus F$ est ample si et seulement si Codim $F \geq 2$.

Amplitude d'une relation $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$. – Localement $J^1(M, N)$ s'identifie à :

$$J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}^n,$$

où $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des cartes de M et N. On note $(x, y, v_1, ..., v_m)$ un élément de $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ et on pose :

$$J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp = \{(x, y, v_1, ..., v_{m-1})\},$$

ainsi $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp \times \mathbb{R}^n$. On note $p^\perp$ la projection sur le premier facteur et $\mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \subset J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ l'image de $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ par l'identification locale. Schématiquement, on a :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \arrow[r] & J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \arrow[d, "p^\perp"] \\ & J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp. \end{tikzcd}$$

Enfin, si $z \in J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp$, on pose : $\mathcal{R}_z = (p^\perp)^{-1}(z) \cap \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$.

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ est *ample* si pour toute identification locale $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, et pour tout $z \in J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp$, $\mathcal{R}_z$ est ample dans $(p^\perp)^{-1}(z) \simeq \mathbb{R}^n$.

Remarque. – Evidemment, ca ne dépend pas de la carte choisie puisqu'on les prend toutes...

Proposition. – *La relation différentielle $\mathcal{I}$ des immersions de M^m dans N^n est ample si $n > m$.*

Démonstration. – Soit $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \prod_{i=1}^{m} \mathbb{R}^n$ une représentation locale. Alors

$$(x, y, v_1, ..., v_m) \in \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \iff (v_1, ..., v_m) \text{ est libre dans } \mathbb{R}^n.$$

Soit $z = (x, y, v_1, ..., v_{m-1}) \in J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^{\perp}$.
1) Si $(v_1, ..., v_{m-1})$ sont linéairement indépendants alors :

$$\begin{array}{rcl} v_m \in (p^{\perp})^{-1}(z) \text{ est dans } \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} & \Longleftrightarrow & v_m \notin Vect(v_1, ..., v_{m-1}) =: \Pi \\ & \Longleftrightarrow & v_m \in \mathbb{R}^n \setminus \Pi. \end{array}$$

Ainsi : $\mathcal{R}_z = \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}} \cap (p^{\perp})^{-1}(z) = \mathbb{R}^n \setminus \Pi$. Or la codimension de Π est $n - (m-1) \geq 2$, donc $\mathcal{R}_z$ est ample.
2) Si $(v_1, ..., v_{m-1})$ sont liés alors $\mathcal{R}_z = \emptyset$ et donc $\mathcal{R}_z$ est ample. □

Deux théorèmes assurant un h-principe. – Une variété est dite *fermée* si elle est compacte sans bord, elle est dite *ouverte* si aucune de ses composantes connexes n'est fermée. En particulier une variété connexe dont le bord est non vide est ouverte.

Théorème 1 (Gromov 69-71). – *Soit M une variété ouverte et $\mathcal{R}$ une relation différentielle ouverte et $Diff(M)$-invariante, alors $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe paramétrique i.e.*

$$J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Ce théorème est admis, en revanche la démonstration du prochain théorème occupera toute la leçon VIII.

Théorème 2 (Gromov 69-73). – *Si $\mathcal{R}$ est ouverte et ample, alors $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe paramétrique i.e.*

$$J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Remarque. – Ici, pas d'hypothèse sur la variété M.

4.3 Le théorème de Smale-Hirsch

Théorème de Smale-Hirsch. – *On suppose que $m < n$ ou, si $m = n$, que M est ouverte. L'application*

$$\begin{array}{rccc} J : & I(M, N) & \longrightarrow & Mono(TM, TN) = \Gamma(\mathcal{I}) \\ & f & \longmapsto & j^1 f \end{array}$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Démonstration. – Il est immédiat de constater que $\mathcal{I} \subset J^1(M, N)$ est ouverte. On sait aussi qu'elle est $Diff(M)$-invariante et ample. Il suffit donc d'appliquer les théorèmes de Gromov. □

Cas où M est parallélisable et $N = \mathbb{R}^n$. – Il y a un homéomorphisme (non naturel) entre l'espace des monomorphismes de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ et la variété de Stiefel $V_{n,m}$ des m-repères de $\mathbb{R}^n$. Etant donné un repère $(v_1, ..., v_m)$ de $\mathbb{R}^m$, on définit :

$$\begin{array}{ccc} Mono(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & V_{n,m} \\ L & \longmapsto & (L(v_1), ..., L(v_m)). \end{array}$$

Puisque M est parallélisable, il existe un champ de repères global $(v_1, ..., v_m)$ sur M et un homéomorphisme :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\mathcal{I}) & \longrightarrow & C^{\infty}(M, V_{n,m}) \\ \sigma & \longmapsto & (x \mapsto (\sigma_x(v_1(x)), ..., \sigma_x(v_m(x)))\,. \end{array}$$

Corollaire. – *Soit M parallélisable ($m \leq n$ ou $m = n$ et M ouverte) alors $I(M,N)$ est faiblement homotopiquement équivalent à $C^\infty(M, V_{n,m})$. En particulier toute variété parallélisable admet une immersion dans $\mathbb{R}^{m+1}$ ($\mathbb{R}^m$ si M est ouverte)et*

$$\pi_0(I(M,\mathbb{R}^n)) \simeq [M, V_{n,m}].$$

Démonstration. – En effet $C^\infty(M, V_{n,m})$ contient toujours les applications constantes et par conséquent n'est jamais vide. □

Remarque. – On avait déjà montré à la leçon II que si M admet une immersion dans $\mathbb{R}^m$ alors M est parallélisable.

Corollaire. – *Toute variété orientable de dimension 3 s'immerge dans $\mathbb{R}^4$ ($\mathbb{R}^3$ si ouverte).*

En effet, un peu de théorie homotopique montre que toute variété orientable de dimension 3 est parallélisable [1]

Corollaire. – *Soit M une variété presque parallélisable, alors $M \setminus \{pt\}$ admet une immersion dans $\mathbb{R}^m$.*

Cas où M est stablement parallélisable et $N = \mathbb{R}^{m+1}$. –

Corollaire. – *Si M est stablement parallélisable, M admet une immersion dans $\mathbb{R}^{m+1}$. De plus, $I(M,\mathbb{R}^{m+1})$ est faiblement homotopiquement équivalent à $C^\infty(M^m, SO(m+1))$, en particulier :*

$$\pi_0(I(M,\mathbb{R}^{m+1})) \simeq [M, SO(m+1)].$$

Remarque. – Dans la leçon II, on a établi une réciproque partielle au premier point puisque l'on a montré que si M orientable admet une immersion dans $\mathbb{R}^{m+1}$ alors M est stablement parallélisable. L'hypothèse orientable est indispensable, $\mathbb{R}P^2$ n'est pas stablement parallélisable et pourtant il existe des immersions de $\mathbb{R}P^2$ dans $\mathbb{R}^3$: la surface de Boy par exemple.

Démonstration. – Soit ϵ le fibré trivial $M \times \mathbb{R} \to M$ et ν_0 une section partout non nulle de ce fibré. Considérons :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & Mono(TM, \mathbb{R}^{m+1}) & \longrightarrow & Mono_+(TM \oplus \epsilon, \mathbb{R}^{m+1}) \\ & L & \longmapsto & \tilde{L} \end{array}$$

où $\tilde{L}$ est défini de la façon suivante. En un point $x \in M$, soit $(v_1, ..., v_m)$ un repère direct de T_xM, (rappelons que si M est stablement parallélisable alors M est orientable), on pose :

$$\begin{array}{ll} \tilde{L}_x = L_x & \text{sur } TM \\ \tilde{L}_x(\nu_0) & \text{de norme 1 t. q. } (L_x(v_1), ..., L_x(v_m), \tilde{L}_x(\nu_0)) \text{ soit directe dans } \mathbb{R}^{m+1}. \end{array}$$

Il est facile de vérifier que Φ est une équivalence d'homotopie. Puisque M est stablement parallélisable, $TM \oplus \epsilon$ est trivial et $Mono_+(TM \oplus \epsilon, \mathbb{R}^{m+1})$ est homotopiquement équivalent à $C^\infty(M, SO(m+1))$. □

[1] En fait toute variété de dimension trois s'immerge dans $\mathbb{R}^4$.

Paradoxe de Smale. – *L'inclusion standard* $i : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *est régulièrement homotope à* $r \circ i$ *où* r *est une réflexion de* $\mathbb{R}^3$.

Démonstration. – La sphère $\mathbb{S}^2$ est stablement parallélisable donc :

$$\pi_0(I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)) \simeq [\mathbb{S}^2, SO(3)] \simeq \pi_2(SO(3))/\pi_1(SO(3)) = 0,$$

car $\pi_2(SO(3)) = 0$. □

4.4 Exercices

Exercice 1. – La relation différentielle $y' = y$ dans $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfait-elle au h-principe ? Même question pour $y' = y^2$ (toujours dans $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$).

Exercice 2. – Soit $A_\delta = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \delta^2 < x_1^2 + x_2^2 < 4\}$ avec $0 < \delta \leq 1$.
a) Montrer qu'il existe une famille de fonctions $f_t : A \to \mathbb{R}$ telle que :
$.f_0(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)$,
$.f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$,
$.grad\ f_t \neq 0$.
b) Essayer de construire cette famille explicitement (je n'y suis pas arrivé...)

Exercice 3. – Décrire $\pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{T}^2))$.

Exercice 4. – Montrer que la relation différentielle des immersions totalement réelles $f : M \to \mathbb{C}^m$ vérifie le h-principe paramétrique. Déterminer $\pi_0(I_{TR}(\mathbb{T}^2, \mathbb{C}^2))$.

Exercice 5. – Une application $f : M \to N$ est une *submersion* si, pour tout $x \in M$, $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ est surjective, ceci implique en particulier $m \geq n$.
a) La relation différentielle des submersions est-elle ample ?
b) Montrer que si $f : M \to \mathbb{R}^n$ est une submersion alors M est ouverte.
c) Les submersions de M dans $\mathbb{R}^n$ vérifient-elle un h-principe ?

Exercice 6. – Montrer que toute variété presque parallélisable de dimension 7 s'immerge dans $\mathbb{R}^8$, ainsi, pour cette dimension : $PP_7 = SP_7$.

Exercice 7. – Montrer que si M est presque parallélisable alors $M \sharp M$ s'immerge dans $\mathbb{R}^{m+1}$.

Exercice 8. – On suppose $m > 1$ impair. Quel(s) invariant(s) classifie(nt) les immersions de $\mathbb{S}^m$ dans $\mathbb{R}^{2m}$?

Exercice 9. – a) Montrer que si il existe un fibré vectoriel ν de rang r sur M tel que $TM \oplus \nu$ soit isomorphe au fibré trivial ϵ^{n+r} de rang $n + r$, alors M s'immerge dans $\mathbb{R}^{m+r}$. Réciproque.
b) On admet la règle de simplification des sommes directes de fibrés vectoriels :

$$\xi_1 \oplus \eta \simeq \xi_2 \oplus \eta \quad \Rightarrow \quad \xi_1 \simeq \xi_2,$$

à condition que $rang(\xi_1) = rang(\xi_2) = k > m =$ dimension de la base.
On suppose qu'il existe une immersion $f : M \to \mathbb{R}^{n+r}$ $(n \geq m + 1)$ ainsi que r sections du fibré normal à f, $(\nu_1, ..., \nu_r)$, linéairement indépendantes en chaque point. Montrer que M s'immerge dans $\mathbb{R}^n$.
c) Montrer que $\mathbb{R}P^7$ s'immerge dans $\mathbb{R}^8$ et $\mathbb{R}P^4$, $\mathbb{R}P^5$, $\mathbb{R}P^6$ dans $\mathbb{R}^7$. (On ne peut pas faire mieux, on montre que les dimensions de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^n$ sont les plus basses possibles).

Chapitre 5

L'intégration convexe

5.1 Le lemme fondamental

Définition. – Un lacet $g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $g(0) = g(1)$ *entoure* $z \in \mathbb{R}^n$ si $Conv(g([0,1])) \supset \{z\}$.

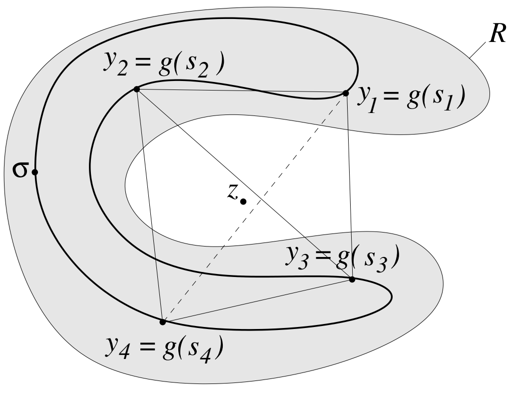
Lemme fondamental. – *Soient $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, $\sigma \in \mathcal{R}$ et $z \in Conv(\mathcal{R}, \sigma)$. Il existe un lacet $h : [0,1]$ basé en σ qui entoure z et tel que :*

$$z = \int_0^1 h(s)ds.$$

Démonstration. – Rappelons que $Conv(\mathcal{R}, \sigma)$ s'obtient en prenant l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum \alpha_k y_k$ avec $y_k \in [\sigma]$ = composante connexe par arcs de $\mathcal{R}$ contenant σ, $\sum \alpha_k = 1$, $\alpha_k \in [0,1]$. Donc il existe $y_1, ..., y_N, \alpha_1, ..., \alpha_N$ tels que :

$$z = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k y_k$$

et tout lacet $g : [0,1] \to \mathcal{R}$ basé en σ et passant par $y_1, ..., y_N$ vérifie $Conv(g([0,1])) \supset \{z\}$ i. e. g entoure z.



En général $z \neq \int_0^1 g(s)ds$. Notons $s_1, ..., s_N$ les temps où $g(s_k) = y_k$ et soit $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ telle que :

i) $f_k < \eta_1$ sur $[0,1] \setminus B(s_k, \eta_2)$,

ii) $\int_0^1 f_k = 1$,
avec η_1, η_2 deux nombres strictement positifs arbitraires. On pose :

$$z_k = \int_0^1 g(s) f_k(s) ds.$$

Etant donné $\epsilon > 0$, on peut choisir η_1, η_2 tels que, pour tout $k \in \{1, ..., N\}$, on ait $\|z_k - g(s_k)\| \leq \epsilon$. Comme $\mathcal{R}$ est ouverte, si ϵ est suffisamment petit, $z \in Conv(z_1, ..., z_N)$. Par conséquent il existe $0 \leq p_1, ..., p_N \leq 1$ tels que $\sum p_k = 1$ et :

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=1}^{N} p_k z_k &&= \sum_{k=1}^{N} p_k \int_0^1 g(s) f_k(s) ds \\ &= \int_0^1 g(s) \sum_{k=1}^{N} p_k f_k(s) ds &&= \int_0^1 g(s) F(s) ds \end{aligned}$$

où $F(s) = \int_{k=1}^{N} p_k f_k(s)$. Soit :

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & s & \longmapsto & \displaystyle\int_0^s F(u) du. \end{array}$$

On a $\lambda'(s) = F(s) > 0$, $\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$. Donc λ est un difféomorphisme croissant de $[0,1]$. Effectuons le changement de variable $s = \lambda^{-1}(t)$ c'est-à-dire $t = \lambda(s)$, on a $dt = \lambda'(s) ds = F(s) ds$ d'où :

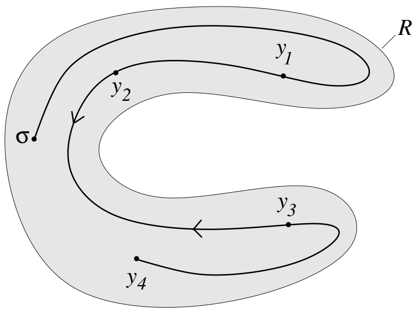
$$z = \int_0^1 g(s) F(s) ds = \int_0^1 g \circ \lambda^{-1}(t) dt.$$

Ainsi, $h = g \circ \lambda^{-1}$ convient. □

Remarque. – A priori $g \in \Omega_\sigma(\mathcal{R})$, mais il est bien évident que l'on peut choisir g parmi les "allers-retours" i. e. l'espace :

$$\Omega_\sigma^{AR}(\mathcal{R}) = \{g \in \Omega_\sigma(\mathcal{R}) \mid \forall t \in [0,1] \;\; g(t) = g(1-t)\},$$

l'intérêt étant que maintenant on a affaire avec un espace contractible.



Lemme fondamental (version paramétrique). – *Soient $E = B \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} B$ un fibré trivial, $B = [0,1]^m$, $\mathcal{R} \subset E$ ouverte, $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$ et $z \in \Gamma(E)$ tel que :*

$$\forall b \in B, \;\; z(b) \in Conv(\mathcal{R}_b, \sigma(b)),$$

où $\mathcal{R}_b = \pi^{-1}(b) \cap \mathcal{R}$. *Alors il existe* $h : [0,1] \to \Gamma(\mathcal{R})$ *avec* $h(0) = h(1) = \sigma$ *telle que :*

$$\forall b \in B,\ z(b) = \int_0^1 h(s,b)ds.$$

Démonstration. – Il suffit de rajouter le paramètre $b \in B$ dans la preuve précédente. On décide de plus, d'après la remarque, de choisir $g : [0,1] \to \Gamma(\mathcal{R})$ telle que, pour tout $b \in B$, g_b soit dans $\Omega^{AR}_{\sigma(b)}(\mathcal{R}_b)$. □

Remarque. – Si $\mathcal{R}$ est ample, la condition $z(b) \in Conv(\mathcal{R}_b, \sigma(b))$ est automatiquement vérifiée.

5.2 Le h-principe 1-dimensionnel

Soit $B = [0,1]^m = [0,1]^{m-1} \times [0,1] = C \times [0,1]$. On décompose $b \in B$ sous la forme $b = (c,t)$, $c \in C$.

Théorème (h-principe 1-dimensionnel). – *Soient* $E = B \times \mathbb{R}^n \to B$, $B = C \times [0,1]$, $\mathcal{R} \subset E$ *ouverte et ample et* $f_0 : B \to \mathbb{R}^n$. *On suppose que* $\mathcal{R} \to B$ *admet une section* σ, *alors il existe une homotopie* $f_u : B \to \mathbb{R}^n$ *telle que :*

1) $\|f_1 - f_0\|_{C^0} \leq \epsilon$,

2) $b \mapsto (b, \partial_t f_1(b))$ *est une section de* $\mathcal{R} \to B$ *homotope à* σ *dans* $\Gamma(\mathcal{R})$.

Démonstration. – Soit σ une section de $\mathcal{R}$, puisque $\mathcal{R}$ is ample, on est dans les conditions du lemme fondamental version paramétrique. Il existe $h : [0,1] \to \Gamma(\mathcal{R})$ telle que :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}(b) = \int_0^1 h(s,b)ds.$$

Soit :

$$f_1(c,t) = f_0(c,0) + \int_0^t h(\theta(s),(c,s))ds$$

où $\theta : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction que l'on déterminera dans les lignes qui suivent. Constatons d'abord que f est une solution de $\mathcal{R}$ puisque :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}(c,t) = h(\theta(t),(c,t)) \in \mathcal{R}_{(c,t)}$$

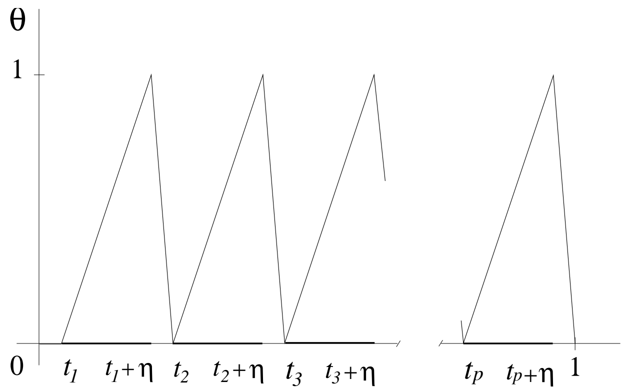
et f_1 est homotopique à f_0 par $(1-u)f_0 + uf_1$, $u \in [0,1]$. Voilà comment choisir θ pour obtenir $\|f_1 - f_0\|_{C^0} \leq \epsilon$. Fixons $\eta > 0$, soient $0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < 1$ tels que :

i) si $I_k = [t_k, t_k + \eta]$ alors $I_j \cap I_k = \emptyset$ si $j \neq k$,

ii) $\sum_{k=1}^p long(I_k) = p\eta \geq 1 - \eta$.

On pose :

$$\begin{array}{cccl} \theta : & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & t & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1, \\ \dfrac{s - t_k}{\eta} & \text{si } t_k \leq t \leq t_k + \eta, \\ \dfrac{t_{k+1} - s}{t_{k+1} - (t_k + \eta)} & \text{si } t_k + \eta \leq t \leq t_{k+1}. \end{cases} \end{array}$$



On pose $[t] = \max\{k \mid I_k \subset [0,t]\}$. Introduisons deux fonctions :

$$\begin{aligned} l(c,t) &= f_0(c,0) + \eta \sum_{k=1}^{[t]} \partial_t f_0(c,t_k), \\ k(c,t) &= f_0(c,0) + \sum_{k=1}^{[t]} \int_{I_k} h(\theta(s),(c,s))ds, \end{aligned}$$

et rappelons que :

$$f_1(c,t) = f_0(c,0) + \int_0^t h(\theta(s),(c,s))ds.$$

On va montrer que l'on peut choisir η suffisamment petit de façon que :
i) $\|f_0 - l\|_{C^0} \le \epsilon/3$,
ii) $\|l - k\|_{C^0} \le \epsilon/3$,
iii) $\|k - f_1\|_{C^0} \le \epsilon/3$.
Comme l est une fonction en escalier, le théorème des accroissements finis montre que l'on peut choisir η suffisamment petit pour obtenir i). D'autre part :

$$\|f_1 - k\|_{C^0} \le \int_{I \setminus \cap_{k=1}^p I_k} \mid h(\theta(s),(c,s)) \mid ds \le \eta \max_{[0,1]\times B} |h(s,b)|,$$

on peut donc choisir η suffisamment petit pour obtenir iii). Notons que les majorations i) et iii) ne font pas intervenir θ. Pour la majoration ii), l'idée est la suivante :

$$\begin{aligned} \int_{I_k} h(\theta(s),(c,s))ds &= \eta \int_0^1 h(t,(c,t_k+\eta t))dt \\ &\simeq \eta \int_0^1 h(t,(c,t_k))dt = \eta \frac{\partial f_0}{\partial t}(c,t_k). \end{aligned}$$

La première égalité s'obtient en faisant le changement de variable $t = \theta(s) = \frac{s-t_k}{\eta}$. Ensuite on choisit η de façon que :

$$\forall t \in [0,1] \ \ |h(t,(c,t_k+\eta t)) - h(t,(c,t_k))| \le \epsilon/3,$$

ainsi :

$$\begin{aligned} |k(c,t) - l(c,t)| &= \mid \eta \sum_{k=1}^{[t]} \int_0^1 h(t,(c,t_k+\eta t)) - h(t,(c,t_k))dt| \\ &\le \eta\epsilon/3 \le \epsilon/3 \text{ si } \eta \le 1 \end{aligned}$$

Nous avons donc montré les points i, ii, et iii. (On pourrait lisser θ afin d'obtenir un f_1 C^∞). Il reste maintenant à construire une homotopie de sections $\sigma_u : B \to \mathcal{R}$ telle que $\sigma_0 = \sigma$ et $\sigma_1 = (id, \partial_t f_1)$. Si $H_u : [0,1] \to \Gamma(\mathcal{R})$ est une homotopie joignant $H_0 = \sigma$ à $H_1 = h$, alors $\sigma_u(c,t) = H_u(\theta(t),(c,t))$ convient (on a identifié σ à $[0,1] \to \Gamma(\mathcal{R})$, $s \mapsto \sigma(b)$). Une telle homotopie H_u pourrait ne pas exister si $s \mapsto h(s,b)$ n'était pas homotope à $s \mapsto \sigma(b)$ dans $\mathcal{R}_b$, la remarque qui suit le lemme fondamental permet d'éviter cet écueil et nous donne de facto l'homotopie désirée. $\square$

n° On note :

$$\|f\|_{C^1,\hat{t}} = \max(\|f\|_{C^0}, \|\frac{\partial f}{\partial c_1}\|_{C^0}, ..., \|\frac{\partial f}{\partial c_{m-1}}\|_{C^0}).$$

C'est la norme C^1 sans le terme $\|\frac{\partial f}{\partial t}\|_{C^0}$. Avec à peine plus de travail, on peut remplacer la conclusion 1) du théorème du h-principe 1-dimensionnel par :

$$\|f_1 - f_0\|_{C^1,\hat{t}} \leq \epsilon.$$

Il y a aussi un *h-principe 1-dimensionnel relatif.*

Théorème (h-principe 1-dimensionnel relatif). – *Soient $E = B \times \mathbb{R}^n \to B$, $B = C \times [0,1]$, $\mathcal{R} \subset E$ ouverte et ample et $f_0 : B \to \mathbb{R}^n$. Soit $K \subset B$ un fermé tel que $\frac{\partial f_0}{\partial t} \in \mathcal{R}$ sur un ouvert $\mathcal{U}(K)$. On suppose que $\mathcal{R} \to B$ admet une section σ et qu'il existe une homotopie $\sigma_u \in \Gamma(\mathcal{R})$ de σ au dessus de $\mathcal{U}(K)$ telle que $\sigma_1 = (id, \frac{\partial f_0}{\partial t})$. Alors il existe une homotopie $f_u : B \to \mathbb{R}^n$ telle que :*
1) $\forall u \in [0,1]$, $f_u \equiv f_0$ sur un ouvert $\mathcal{U}'(K) \subset \mathcal{U}(K)$.
2) $\|f_1 - f_0\|_{C^0} \leq \epsilon$,
3) $b \mapsto (b, \partial_t f_1(b))$ est une section de $\mathcal{R} \to B$ homotope à σ dans $\Gamma(\mathcal{R})$.

Nous vous proposons de vous exercer à la démonstration de ce résultat en exercice 1.

5.3 Un théorème de Gromov

Théorème. – *Soit $\mathcal{R} \subset J^1(M,N)$ ouverte et ample, $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$ et $f_0 = bs(\sigma) : M \to N$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $f : M \to N$ et une homotopie $\sigma_u \in \Gamma(\mathcal{R})$ telle que $\sigma_0 = \sigma$, $\sigma_1 = j^1 f$ et $\|f - f_0\|_{C^0} < \epsilon$.*

Dans ces conditions, on dit que $\mathcal{R}$ satisfait au *h-principe C^0-dense.*

Démonstration. – On ne donne que les lignes directrices. On travaille d'abord localement sur un ouvert cubique $\mathcal{U} =]0,1[^m$ de M et un ouvert $\mathcal{V}$ de N. La section $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}) \subset J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})$ s'écrit :

$$\sigma : b \longmapsto (b, f_0(b), \varphi_1(b), ..., \varphi_m(b)) \in \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}.$$

On utilise le h-principe 1-dimensionnel pour réaliser une homotopie de σ dans $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}})$ et obtenir une section qui s'intègre par rapport à la dernière variable. Précisément, soit $\sigma^\perp : B \to J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})^\perp$ l'application :

$$b \longmapsto (b, f_0(b), \varphi_1(b), ..., \varphi_{m-1}(b)),$$

on note $E = B \times \mathbb{R}^n \stackrel{\pi}{\longrightarrow} B$ le fibré trivial obtenu en tirant en arrière le fibré $J^1(\mathcal{U},\mathcal{V}) \to J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})^\perp$ par l'application $\sigma^\perp$. On note encore $\bar{\sigma} : B \to E$ l'application donnée par $b \mapsto (b, \varphi_m(b))$. Schématiquement, on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} E = B \times \mathbb{R}^n & & J^1(\mathcal{U},\mathcal{V}) \\ \bar{\sigma} \uparrow\downarrow \pi & \nearrow \sigma & \downarrow \\ B & \stackrel{\sigma^\perp}{\longrightarrow} & J^1(\mathcal{U},\mathcal{V})^\perp. \end{array}$$

Soit $\mathcal{S} \subset E$ la relation différentielle obtenue en tirant en arrière la relation $\mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$. On vérifie immédiatement que $\mathcal{S}$ est ouverte et ample, bien sûr $\bar{\sigma}$ est une section de $\mathcal{S}$. Le h-principe 1-dimensionnel permet de réaliser une homotopie qui joint $\bar{\sigma}$ à une section holonomique $b \mapsto (b, \frac{\partial f_1}{\partial t})$, autrement dit la section :

$$b = (c,t) \mapsto (b, f_1(b), \varphi_1(b), ..., \varphi_{m-1}(b), \frac{\partial f_1}{\partial t}(b))$$

est un élément de $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}})$. En appliquant de nouveau cette même procédure pour l'avant-dernière variable, on obtient :

$$b \mapsto (b, f_2(b), \varphi_1(b), ..., \varphi_{m-2}(b), \frac{\partial f_2}{\partial c_{m-1}}(b), \frac{\partial f_1}{\partial t}(b)) \in \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}.$$

En remarquant que $\mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ est ouverte et que f_2 et f_1 sont $(C^1, \widehat{c_{m-1}})$-proches, on peut réaliser une homotopie de cette section dans $\Gamma(\mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}})$ de façon à obtenir :

$$b \mapsto (b, f_2(b), \varphi_1(b), ..., \varphi_{m-2}(b), \frac{\partial f_2}{\partial c_{m-1}}(b), \frac{\partial f_2}{\partial t}(b)) \in \mathcal{R}_{\mathcal{U},\mathcal{V}},$$

et ainsi de suite jusqu'à obtenir une section complètement intégrée. Il faut ensuite recoller les morceaux, cela est possible grâce à la version relative du h-principe 1-dimensionnel, c'est-à-dire, en fait, à la contractibilité de Ω_b^{AR}. $\square$

Il n'y a aucune difficulté dans ce contexte à passer d'un h-principe à un h-principe paramétrique.

Théorème (Gromov). – *Soit $\mathcal{R} \subset J^1(M,N)$ ouverte et ample, alors $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe C^0-dense.*

Cela signifie que si P est une variété compacte vue comme un espace de paramètres et $\sigma : P \to \Gamma(\mathcal{R})$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une homotopie $\sigma_u : [0,1] \times P \to \Gamma(\mathcal{R})$ telle que $\sigma_0 = \sigma$ et

$$\begin{array}{rccl} \sigma_1 : & P & \longrightarrow & J(\mathcal{S}ol(\mathcal{R})) \subset \Gamma(\mathcal{R}) \\ & p & \longmapsto & j^1 f_p. \end{array}$$

De plus : $\max_{p\in P} \|g_p - f_p\|_{C^0} < \epsilon$, où $g_p = bs(\sigma) : P \to C^\infty(M,N)$.

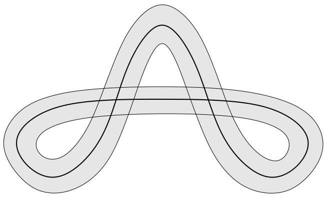
5.4 Exercices

Exercice. 1. – Compléter la démonstration du h-principe 1-dimensionnel de façon à obtenir un théorème relatif.

Exercice. 2. – a) Donner une construction géométrique directe d'une immersion $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$ dont l'application de Gauss orientée $G^{or}(f) : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^2$ a une image contenue dans un voisinage d'un hémisphère.
b) Soit $f_0 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$ une immersion quelconque. Montrer qu'il existe une immersion $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que f soit C^0-(arbitrairement) proche de f_0 et $G^{or}(f)$ évite un point de $\mathbb{S}^2$.
c) Que se passe-t-il si on demande à $G^{or}(f)$ d'éviter deux points antipodaux ?
d) Question ouverte (M. Gromov) : existe-t-il une immersion $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^3$ dont l'application de Gauss évite les quatre sommets d'un tétraèdre régulier inscrit dans $\mathbb{S}^2$?

Exercice. 3. – On travaille dans $I([0,1], \mathbb{R}^2)$ et on considère la relation différentielle fermée $\mathcal{R} = \{x'^2 + y'^2 = 1\}$. Montrer que toute courbe $f_0 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ telle que $|f_0'|^2 < 1$ peut être approchée au sens C^0 par une solution $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ de $\mathcal{R}$.

Exercice. 4. – Echec du h-principe relatif pour les immersions $D^2 \to \mathbb{R}^2$. Montrer que l'immersion $f_0 : \mathbb{S}^1 \times]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}^2$ représentée ci-dessous ne peut pas être étendue en une immersion de D^2 dans $\mathbb{R}^2$, pourtant le 1-jet de f_0 peut être étendu en une section $\sigma \in \Gamma(\mathcal{I})$ ($\mathcal{I}$ est la relation différentielle des immersions de D^2 dans $\mathbb{R}^2$).



Bibliographie

M. ADACHI, *Embeddings and immersions*, Translations of the Mathematical Monographs, Vol. 124, American Mathematical Society, 1993.

M. BERGER ET B. GOSTIAUX, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, PUF.

G. BREDON, *Topology and geometry*, GTM, Springer-Verlag.

J.DAVIS ET P. KIRCK, *Lecture Notes in Algebraic Topology*, GSM, AMS.

Y. ELIASHBERG ET N. MISHACHEV, *Introduction to the h-principle*, Graduate Studies in Mathematics, 48, AMS, Providence RI, 2002.

M. GROMOV, *Partial Differential Relations*, Springer-Verlag, 1986.

A. HATCHER, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press.

M. HIRSCH, *Differential Topology*, GTM, Springer-Verlag.

J. LAFONTAINE, *Introduction aux variétés différentielles*, PUG.

F. LAUDENBACH, *Topologie différentielle*, Cours donné à l'Ecole Polytechnique.

D. SPRING, *Convex Integration Theory*, Monographs in Mathematics, Vol. 92, Birkhäuser Verlag, 1998.