FIBRÉS PRINCIPAUX ET CLASSES D'OBSTRUCTIONS

VINCENT BORRELLI

1. Fibrés principaux

G-fibrés et G-fibrés principaux. – Soit F une variété et $\pi : E \to X$ un fibré dont la fibre type (ou fibre modèle) est F. Les trivialisations locales $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \to \mathcal{U}_\alpha \times F$ induisent des applications de transitions $t_{\alpha\beta} : \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \to Diff(F)$ par $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x,v) = (x, t_{\alpha\beta}(x)(v))$. Soit $G \subset Diff(F)$ un groupe de Lie.

Définition. – $\pi : E \to X$ est un G-*fibré* s'il existe un recouvrement et des trivialisations $\{\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $\pi : E \to X$ tels que les applications de transition soit à valeur dans G.

On dit aussi que G est le groupe structural de $\pi : E \to X$. Il est important de remarquer que le groupe G agit sur la fibre modèle F mais pas naturellement sur les fibres $E_x = \pi^{-1}(x)$ de E. Une action de G sur E_x dépend en effet du choix d'un G-*repère* c'est-à-dire d'une identification $f : F \to E_x$ telle que $\varphi_\alpha \circ f \in G$. Le groupe G agit alors sur E par $G \times E_x \to E_x, (g, e_x) \mapsto f(f^{-1}(e_x).g)$ [1]. L'ensemble de toutes ces identifications

$$FE = \{(x,f) | x \in X, f : F \to E_x \text{ est un } G\text{-repère}\}$$

forme un G-fibré $p : FE \to X$ appelé le *fibré des repères* de $\pi : E \to X$. La fibre modèle est précisément G, les trivialisations locales sont données par

$$\begin{array}{rccc} \psi_\alpha : & p^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) & \longrightarrow & \mathcal{U}_\alpha \times G \\ & (x,f) & \longmapsto & (x, \varphi_\alpha \circ f) \end{array}$$

et $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(x,g) = (x, t_{\alpha\beta}(x).g)$. Les fonctions de transition proviennent de celles de $\pi : E \to X$ et sont des translations à gauche de G sur lui-même.

Définition. – Un G-*fibré principal* est un G-fibré $\pi : P \to X$ dont la fibre modèle est G et dont les applications de transitions sont des translations à gauche de G sur lui-même.

Bien sûr, le fibré des repères de tout G-fibré est un G-fibré principal.

Soit $\pi : P \to X$ un G-fibré principal, on définit une action à droite de G sur P par : $p.g = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(p).g)$ pour $p \in \mathcal{U}_\alpha$. Cette action est bien définie car si $p \in \pi^{-1}(x)$ avec $x \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$ alors

$$\varphi_\beta(p.g) = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(p).g) = t_{\alpha\beta}(x)\varphi_\alpha(p).g = \varphi_\beta(p).g$$

[1] Notons qu'une trivialisation $(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha)$ fournit une identification.
Si $x \in \mathcal{U}_\alpha$ alors $\varphi_\alpha^{-1} : \{x\} \times F \to E_x = \pi^{-1}(x)$.

d'où $p.g = \varphi_\beta^{-1}(\varphi_\beta(p).g)$. Pour cette action $P/G \simeq X$.

Fibrés associés. – Etant donnés $P \to X$ un G-fibré principal et $\rho : G \to Diff(F)$ une représentation. L'ensemble E des classes d'équivalence des couples $(p,v) \in P \times F$ sous la relation $(p,v) \sim (pg, \rho(g)^{-1}.v)$ est un G-fibré au dessus de X.

Définition. – Le G-fibré vectoriel E est dit *associé* à P, on le note $E = P \times_\rho F$.

On peut voir tout G-fibré vectoriel $E \to X$ comme un fibré associé, en effet si $P = FE$ et ρ est l'inclusion $G \subset Diff(F)$ alors $E \simeq FE \times_G F$.

La notion d'espace associé peut être entendue de manière plus large. Par exemple, si G' est un groupe et $\rho : G \to G'$ un morphisme surjectif, le fibré $P' = P \times_\rho G'$ des classes d'équivalence des couples $(p, g') \in P \times G'$ sous la relation $(p, g') \simeq (pg, \rho^{-1}(g)g')$ est un G'-fibré principal. On dit encore que P' est associé à P par ρ.

2. Obstruction

Soit $P \to X$ un G-fibré principal avec G connexe. On voudrait construire une section de ce fibré. Au dessus du 1-squelette X^1 de X ceci est toujours possible. Par contre il y a une obstruction à trouver une section au dessus du 2-squelette X^2. Cette obstruction se mesure au moyen d'une classe $\mathfrak{o}_P \in H^2(X, \pi_1(G))$ que nous allons construire.

Soit $\mathcal{T} = \{\Delta_\alpha^k\}$ une triangulation de X. On note $X^k = \cup_{\alpha, j \leq k} \Delta_\alpha^j$.

Proposition 1. – *$P_{|X^1}$ admet une section.*

Démonstration. – On choisit d'abord une section s de $P_{|X_0}$ et des sections $\sigma_\beta : \Delta_\beta^1 \to P_{|\Delta_\beta^1}$. Pour alléger l'écriture on note α pour Δ_α^0. Si α_0 et α_1 forment le bord d'un certain Δ_β^1, on peut définir $u_{\alpha_0}, u_{\alpha_1} \in G$ par

$$s(\alpha_0) = \sigma_\beta(\alpha_0).u_{\alpha_0}, \quad s(\alpha_1) = \sigma_\beta(\alpha_1).u_{\alpha_1}.$$

Puisque G est connexe, il existe $u_\beta : \Delta_\beta^1 \to G$ joignant u_{α_0} à u_{α_1} et $s : \Delta_\beta^1 \to P_{|\Delta_\beta^1}$, $x \mapsto \sigma_\beta(x)u_\beta(x)$ prolonge s au dessus de Δ_β^1. En répétant ce procédé, on obtient une section $s : X^1 \to P_{|X^1}$. □

On veut maintenant étendre s au 2-squelette. Soit Δ un 2-simplexe et $\sigma : \Delta \to P_{|\Delta}$ une section arbitraire. On définit $u_{\Delta,s} : \partial\Delta \to G$ par $s(x) = \sigma(x).u_{\Delta,s}(x)$.

Proposition 2. – *L'application $\Delta \mapsto [u_{\Delta,s}] \in \pi_1(G)$ définit une 2-cochaîne simpliciale c_s à valeur dans $\pi_1(G)$ qui ne dépend que du choix de s.*

Démonstration. – Soient $\sigma, \overline{\sigma} : \Delta \to P_\Delta$ deux sections, il existe $g : \Delta \to G$ telle que $\overline{\sigma}(x) = \sigma(x).g(x)$ et $\overline{u}_{\Delta,s}(x) = g(x)u_{\Delta,s}(x)$. Or $g_{|\partial\Delta}$ est contractible donc $[\overline{u}_{\Delta,s}] = [u_{\Delta,s}]$ dans $\pi_1(G)$. □

Proposition 3. – *c_s est un cocycle.*

Démonstration. – Soit Δ^3 un 3-simplexe, il faut montrer que $c_s(\partial\Delta^3) = 0$. Notons $\partial\Delta^3 = \Delta^2_{\beta_1} \cup \Delta^2_{\beta_2} \cup \Delta^2_{\beta_3} \cup \Delta^2_{\beta_4}$. Soit $\sigma_{\Delta^3} : \Delta^3 \to P_{|\Delta^3}$ une section. D'après la proposition 2, $c_s(\partial\Delta_3)$ ne dépend pas du choix des sections $\sigma_{\beta_i} : \Delta^2_{\beta_i} \to P_{|\Delta^2_{\beta_i}}$. Choisissons pour σ_{β_i} la restriction de σ_{Δ^3} à $\Delta^2_{\beta_i}$, ainsi

$$s(x) = \sigma_{\Delta^3}.u_{\Delta^2_{\beta_i},s}, \quad \forall x \in \partial\Delta^2_{\beta_i},\ i = 1,..,4,$$

et les $u_{\Delta^2_{\beta_i},s}$ coïncident sur les arêtes $\Delta^2_{\beta_i} \cap \Delta^2_{\beta_j}$, $i \neq j$. On note u_i la restriction de $u_{\Delta^2_{\beta_i},s}$ sur $\partial\Delta^2_{\beta_i}$. Le lacet $u_1.u_2.u_3$ fait des aller-retours le long des arêtes communes. Ainsi $u_1.u_2.u_3 \sim u_4^{-1}$ car les orientations des bords $\partial\Delta^2_{\beta_i}$ sont opposés. C'est dire que $c_s(\sum_{i=1}^4 \Delta^2_{\beta_i}) = 0$. □

Proposition 4. – $c_s = 0 \iff$ *s se prolonge au 2-squelette.*

Démonstration. – ($\Leftarrow$) Evident.
($\Rightarrow$) Si $c_s(\Delta^2) = 0$ alors $u_{\Delta^2,s} : \partial\Delta^2 \to G$ se prolonge en $\overline{u}_{\Delta^2,s} : \Delta^2 \to G$ et on prolonge s sur Δ^2 par $s(x) = \sigma_{\Delta^2}(x).\overline{u}_{\Delta^2,s}(x)$ pour $x \in \Delta^2$. □

Définition. – Soit G un groupe de Lie connexe, la *classe d'obstruction* du G-fibré principal $P \to X$ est la classe $\mathfrak{o}_P \in H^2(X, \pi_1(G))$ représenté par le cocycle c_s.

Proposition 5. – $\mathfrak{o}_P$ *ne dépend pas du choix de s.*

Démonstration. – Evidemment c_s ne change pas si on bouge s par homotopie. Soient s et $\overline{s}$ deux sections de $P_{|X^1} \to X^1$, on peut supposer que $s = \overline{s}$ sur le 0-squelette X^0. On définit une application $u : X^1 \to G$ par $\overline{s}(x) = s(x).u(x)$ et une cochaîne simpliciale b par $\Delta^1_\alpha \to [u_{|\Delta^1_\alpha}] \in \pi_1(G)$. Il est facile de voir que

$$c_{\overline{s}}(\Delta^2_\alpha) = c_s(\Delta^2_\alpha) + b(\partial\Delta^2_\alpha),$$

i. e. $c_{\overline{s}}(\Delta^2_\alpha) = c_s(\Delta^2_\alpha) + db(\Delta^2_\alpha)$ puisque $< b, \partial\Delta > = < db, \Delta >$. Donc $c_{\overline{s}}$ et c_s représentent la même classe de cohomologie. □

Proposition 6. – *Pour tout cocycle c représentant* $\mathfrak{o}_P$*, il existe une section s de* $P_{|X^1}$ *tel que* $c = c_s$*. Ainsi* $\mathfrak{o}_P = 0 \iff P_{|X^2}$ *admet une section.*

Démonstration. – Soit c un cocycle représentant $\mathfrak{o}_P$ et s une section de $P_{|X^1} \to X^1$. Alors $c = c_s + db$. La cochaîne b associe à chaque 1-simplexe Δ_β un élément de $\pi_1(G)$. On peut donc construire une application $u : X^1 \to G$ telle que pour tout 1-simplexe Δ_β, $u : \Delta_\beta \to G$ vaut 1 sur $\partial\Delta_\beta$ et soit un lacet qui représente $b(\Delta_\beta)$. On définit une nouvelle section en posant

$$\overline{s}(x) = s(x).u(x), \quad \forall x \in X^1.$$

Par construction, $c_{\overline{s}} = c_s + db = c$. □

Voici d'autres propriétés - dites de naturalité - de la classe d'obstruction.

Proposition 7. – *a) Soit G un groupe de Lie connexe,* $P \to X$ *un G-fibré principal et* $f : Y \to X$*. Alors* $\mathfrak{o}_{f^*P} = f^*\mathfrak{o}_P \in H^2(Y, \pi_1(G))$.

b) Soient G et G' deux groupes de Lie connexes et $P \to X$, $P' \to X$ deux fibrés principaux de groupes respectifs G et G'. Alors

$$\mathfrak{o}_{P\times_X P'} = \mathfrak{o}_P \oplus \mathfrak{o}_{P'} \in H^2(X,\pi_1(G\times G')) = H^2(X,\pi_1(G)) \oplus H^2(X,\pi_1(G')).$$

c) Soient $P \to X$ un G-fibré principal et $\rho : G \to G'$ un morphisme surjectif. La classe d'obstruction du G'-fibré principal P' associé à P par ρ est

$$\mathfrak{o}_{P'} = R(\mathfrak{o}_P) \in H^2(X,\pi_1(G'))$$

où $R : H^2(X,\pi_1(G)) \to H^2(X,\pi_1(G'))$ est l'homomorphisme induit par la réduction $\rho_\sharp : \pi_1(G) \to \pi_1(G')$.

3. Première classe de Chern et seconde classe de Stiefel-Whitney

Définitions et propriétés. – Soit $E \to X$ un fibré vectoriel réel orienté de rang n. Le fibré des repères de E est donc un $Gl_+(n,\mathbb{R})$-fibré principal.

Définition. – Si $n \geq 3$, la seconde classe de Stiefel-Whitney de $E \to X$, notée $w_2(E)$, est la classe d'obstruction $\mathfrak{o}_{FE} \in H^2(X,\mathbb{Z}_2)$ du fibré des repères $FE \to X$. Si $n = 2$ c'est la réduction modulo 2 de $\mathfrak{o}_{FE}$.

Soit $E \to X$ un fibré vectoriel complexe de rang n. Le fibré des repères de E est donc un $Gl(n,\mathbb{C})$-fibré principal.

Définition. – La première classe de Chern de $E \to X$, notée $c_1(E)$, est la classe d'obstruction $\mathfrak{o}_{FE} \in H^2(X,\mathbb{Z})$ du fibré des repères $FE \to X$.

Un corollaire de la proposition 7 est la

Proposition 8. – *Soient $E \to X$, $E' \to X$ deux fibrés vectoriels réels orientés (resp. deux fibrés vectoriels complexes) alors*

$$w_2(E\oplus E') = w_2(E) + w_2(E') \quad (resp.\ c_1(E\oplus E') = c_1(E) + c_1(E')).$$

Cas des fibrés en droites complexes. On note $Vect^1_{\mathbb{C}}(X)$ l'ensemble des fibrés en droites complexes au dessus de X à isomorphisme près.

Proposition 9. – *Le produit tensoriel induit une structure de groupe abélien sur $Vect^1_{\mathbb{C}}(X)$.*

En effet, le produit tensoriel est commutatif. L'élément neutre est le fibré trivial. Le fibré $E^*\otimes E$ est isomorphe au fibré trivial par $(f^*,e) \mapsto f^*(e)$ donc l'inverse de E est E^*.

Proposition 10.– *a)* $c_1(E\otimes E') = c_1(E) + c_1(E')$,
b) $c_1(E^*) = -c_1(E)$.

On note P (resp. P') le $\mathbb{C}^*$-fibré principal des repères de E (resp. E'). Le $\mathbb{C}^*$-fibré principal des repères de $E\otimes E'$ est donc $P\otimes P'$ c'est-à-dire le $\mathbb{C}^*$-fibré principal associé au $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$-fibré principal $P \times_X P'$ par

$$\begin{array}{rccc} \rho: & \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & (z, z') & \longmapsto & z \otimes z' = zz'. \end{array}$$

Donc $\mathfrak{o}_{P\otimes P'} = R(\mathfrak{o}_{P\times_X P'}) = R(\mathfrak{o}_P \oplus \mathfrak{o}_{P'})$ où $R : H^2(X, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ est induit par

$$\begin{array}{rccc} \rho_\sharp: & \pi_1(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{C}^*) \\ & (n, n') & \longmapsto & n + n'. \end{array}$$

D'où $c_1(E \otimes E') = \mathfrak{o}_{P\otimes P'} = \mathfrak{o}_P + \mathfrak{o}_{P'} = c_1(E) + c_1(E')$. Le b) se déduit du a) puisque $E \otimes E^*$ est trivial.

Théorème. – *La flèche $E \mapsto c_1(E)$ induit un isomorphisme de groupe abélien entre $Vect^1_{\mathbb{C}}(X)$ et $H^2(X, \mathbb{Z})$.*

Démonstration. – Il reste à montrer que $E \to c_1(E)$ est injective et surjective.
Injectivité. Soit $P \to X$ un $\mathbb{C}^*$-fibré principal tel que $\mathfrak{o}_P = 0$. Ce fibré admet donc une section $s : X^2 \to P_{|X^2}$ au dessus du 2-squelette. On peut prolonger cette section sur tous les k-squelettes $k > 2$ car $\pi_{k-1}(\mathbb{C}^*) = 0$, donc P est trivial.
Surjectivité. Soit $c_1 \in H^2(X, \mathbb{Z})$ et c un cocycle représentant c_1. Il s'agit de construire $P \to X$ tel que $\mathfrak{o}_P = c_1$. On va construire P simplexe après simplexe. Pour le 1-squelette, on pose $P^1 = X^1 \times \mathbb{C}^*$ et $s : X^1 \to P^1$, $x \mapsto (x, 1)$. Pour le 2-squelette, on pose $P^2_\alpha = \Delta^2_\alpha \times \mathbb{C}^*$. On recolle P^2_α à P^1 par

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^2_\alpha \times \mathbb{C}^* & \longrightarrow & P^1_{|\partial\Delta^2_\alpha} \\ (x, z) & \longmapsto & s(x)u_\alpha(x)^{-1}z \end{array}$$

où le lacet $u_\alpha : \partial\Delta^2_\alpha \to \mathbb{C}^*$ est dans la classe $c(\Delta^2_\alpha) \in \pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$. On n'a pas en général de section $s : X^2 \to P^2$, toutefois le fibré P^2 admet une section $s_{\partial\Delta^3_\alpha} : \partial\Delta^3_\alpha \to P^2_{|\partial\Delta^3_\alpha}$ au dessus du bord $\partial\Delta^3_\alpha$ de n'importe quel 3-simplexe de la triangulation de X. En effet, notons $\partial\Delta^3_\alpha = \Delta^2_{\beta_1} \cup \Delta^2_{\beta_2} \cup \Delta^2_{\beta_3} \cup \Delta^2_{\beta_4}$. Au dessus de chaque $\Delta^2_{\beta_i}$, P^2 possède des sections. *A priori* il a une obstruction à recoller ces sections car $\partial\Delta^2_{\beta_i} \simeq \mathbb{S}^1$ et $\pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$. En réalité chaque section, restreinte à $\partial\Delta^2_{\beta_i}$ représente $c(\Delta^2_{\beta_i})$ dans $\pi_1(\mathbb{C}^*)$ et comme c est un cocycle, $\sum_i c(\Delta^2_{\beta_i}) = 0$ ce qui permet le recollement. Pour le k-squelette, $k > 2$ on procède par récurrence. On suppose construit P^{k-1} et des sections $s_{\partial\Delta^k_\alpha} : \partial\Delta^k_\alpha \to P^{k-1}_{|\partial\Delta^k_\alpha}$. On pose $P^k_\alpha = \Delta^k_\alpha \times \mathbb{C}^*$ et on recolle par

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta^k_\alpha \times \mathbb{C}^* & \longrightarrow & P^{k-1}_{|\partial\Delta^k_\alpha} \\ (x, z) & \longmapsto & s_{\partial\Delta^k_\alpha}(x)z. \end{array}$$

On obtient des sections $s_{\partial\Delta^{k+1}_\alpha}$ car $\pi_{k-1}(\mathbb{C}^*) = 0$ puisque $k > 2$. Le $\mathbb{C}^*$-fibré principal P ainsi construit vérifie évidemment $\mathfrak{o}_P = c_1$. □

Un exemple : les fibrés en droites complexes au dessus de $\mathbb{C}P^1$. – Il y a un fibré en droites privilégié au dessus de $\mathbb{C}P^1$, appelé le fibré canonique, et qui est défini par

$$H = \{(x, v) \in \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}^2 \mid v \in x\} \to \mathbb{C}P^1.$$

On regarde $\mathbb{C}P^1$ comme la sphère de Riemann $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ et on pose $\mathcal{U}_0 = \mathbb{C}P^1 \setminus \{\infty\}$ et $\mathcal{U}_1 = \mathbb{C}P^1 \setminus \{0\}$. Ce fibré admet pour fonction de transition

$$\begin{array}{rccc} \Psi_1 \circ \Psi_0^{-1} : & \mathcal{U}_0 \cap \mathcal{U}_1 & \longrightarrow & Gl(1,\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* \\ & z & \longmapsto & \text{Mult. par } z. \end{array}$$

En appliquant la construction précédente, on vérifie que :

$$\mathfrak{o}_H = h$$

où $h \in H^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z})$ est la classe d'orientation[2]. Par conséquent $H \to \mathbb{C}P^1$ est un générateur de $Vect^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}P^1)$ et tout fibré en droites complexes au dessus de $\mathbb{C}P^1$ s'écrit $H^n = H \otimes ... \otimes H$ ou $H^{-n} = H^* \otimes ... \otimes H^*$, les fonctions de transitions étant $z \mapsto$ Mult. par z^n et $z \mapsto$ Mult. par z^{-n}. En particulier l'écriture des fonctions de transition pour $T\mathbb{S}^2$ et $T^*\mathbb{S}^2$ permet de voir que $T\mathbb{S}^2 = H^2$ et $T^*\mathbb{S}^2 = H^{-2}$.

4. Bibliographie

Pour le matériel présenté ici j'ai puisé sans vergogne dans les notes du cours "Les invariants de Seiberg-Witten" donné par E. Giroux et B. Sevennec à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon au printemps 96.

Institut Girard Desargues – UPRES-A 5028 du CNRS, Université Claude Bernard, Lyon 1, 43, boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France
E-mail address: borrelli@desargues.univ-lyon1.fr

[2] c'est simplement dire que $z \mapsto z$ est de degré 1.