EXISTENCE ET CLASSIFICATION DES STRUCTURES $Spin^{\mathbb{C}}$

VINCENT BORRELLI

1. Existence de structures $Spin$ et $Spin^{\mathbb{C}}$

Relèvement de fibrés principaux. –

Définition. – Soient G et $\tilde{G}$ deux groupes de Lie, $P \to X$ un G-fibré principal et $\rho : \tilde{G} \to G$ un morphisme surjectif. Un *relèvement de P à $\tilde{G}$* est un couple $(\tilde{P}, f)$ où $\tilde{P}$ est un $\tilde{G}$-fibré principal et $f : \tilde{P} \to P$ une application équivariante (i. e. $f(\tilde{p}.\tilde{g}) = f(\tilde{p}).\rho(\tilde{g})$) fibrée au dessus de l'identité $X \to X$.

Définition. – On dit qu'un morphisme surjectif $\rho : \tilde{G} \to G$ est une *extension centrale* si le noyau $K = Ker\ \rho$ est dans le centre de $\tilde{G}$.

Théorème. –*Soient G et $\tilde{G}$ deux groupes de Lie connexes, $\rho : \tilde{G} \to G$ une extension centrale et P un G-fibré principal. P admet un relèvement à $\tilde{G}$ si et seulement si la classe d'obstruction $\mathfrak{o}_P \in H^2(X, \pi_1(G))$ se relève dans $H^2(X, \pi_1(\tilde{G}))$.*

Démonstration. – ($\Rightarrow$) En effet, si $(\tilde{P}, f)$ est un relèvement, la construction de la classe d'obstruction montre clairement que $\mathfrak{o}_{\tilde{P}}$ relève $\mathfrak{o}_P$.
($\Leftarrow$) Soit $(\Delta_\alpha)_{\alpha \in A}$ une triangulation de X. On va construire $\tilde{P}$ simplexe par simplexe de la manière suivante. Au dessus de chaque k-simplexe Δ_α on choisit une section $\sigma_\alpha : \Delta_\alpha \to P_{|\Delta_\alpha}$ et on pose $\tilde{P}^k_\alpha = \Delta_\alpha \times \tilde{G}$, $f_\alpha(x, \tilde{g}) = \sigma_\alpha(x).\rho(\tilde{g})$. Il s'agit ensuite de recoller les $\tilde{P}^k_\alpha$.

Pour le 1-squelette X^1. Le recollement est facilité car il existe beaucoup de section globale s de $P_{|X_1}$ (G est connexe). On en choisit une particulière. Précisément, si $\widetilde{\mathfrak{o}_P}$ est un relèvement de $\mathfrak{o}_P$ dans $H^2(X, \pi_1(\tilde{G}))$, $\tilde{c}$ un cocycle représentant $\widetilde{\mathfrak{o}_P}$ et c son image par la réduction $\pi_1(\tilde{G}) \to \pi_1(G)$, alors on choisit $s : X^1 \to P_{|X_1}$ telle que $c(s) = c$. On définit $\tilde{P}^1 = X^1 \times \tilde{G}$, $f^1(x, \tilde{g}) = s(x).\rho(\tilde{g})$ et $\tilde{s}(x) = (x, 1)$ (ainsi $f^1 \circ \tilde{s} = s$).

Pour le 2-squelette X^2. Soit $u_\alpha : \partial\Delta_\alpha \to G$, $x \mapsto u_\alpha = \sigma_\alpha^{-1}(x).s(x)$. Par construction l'élément $[u_\alpha] \in \pi_1(G)$ est exactement $c(\Delta_\alpha)$. Puisque $\tilde{c}$ relève c, on peut relever u_α en $\tilde{u}_\alpha : \partial\Delta_\alpha \to \tilde{G}$ avec $[\tilde{u}_\alpha] = \tilde{c}(\Delta_\alpha)$. On recolle alors $\tilde{P}^2_\alpha = \Delta_\alpha \times \tilde{G}$ à $\tilde{P}^1$ par le difféomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \psi_\alpha : & \partial\Delta_\alpha \times \tilde{G} & \longrightarrow & \tilde{P}^1_{|\partial\Delta_\alpha} \\ & (x, \tilde{g}) & \longmapsto & (x, \tilde{u}_\alpha(x)^{-1}.\tilde{g}) = \tilde{s}(x).\tilde{u}_\alpha(x)^{-1}.\tilde{g}. \end{array}$$

Il faut alors vérifier que

$$\forall (x, \tilde{g}) \in \partial\Delta_\alpha \times \tilde{G} : \quad f_\alpha(x, \tilde{g}) = f^1(\psi_\alpha(x, \tilde{g})).$$

Or

$$\begin{aligned} f^1(\psi_\alpha(x,\tilde g)) &= f^1(x,\tilde u_\alpha(x)^{-1}.\tilde g) \\ &= s(x).\rho(\tilde u_\alpha(x)^{-1}.\tilde g) \\ &= s(x).u_\alpha(x)^{-1}.\rho(\tilde g) \\ &= \sigma_\alpha(x).\rho(\tilde g) \\ &= f_\alpha(x,\tilde g). \end{aligned}$$

On a donc obtenu un relèvement $(\tilde P^2, f^2)$ au dessus du 2-squelette. Nous n'avons cependant pas utilisé le fait que $\tilde c$ est un cocycle. Cette dernière propriété asssure l'existence d'une section $\tilde s_{\partial\Delta_\alpha}$ de $\tilde P^2_{|\partial\Delta_\alpha}$ pour tout 3-simplexe Δ_α. En effet, soient $\tilde\sigma_i$, $i=1,..,4$ des sections de $\tilde P^2$ au dessus des faces Δ_{β_i} de Δ_α. Elles définissent des lacets

$$\tilde u_i : \partial\Delta_{\beta_i} \to \tilde G,\ \tilde u_i(x) = \tilde\sigma_i(x)^{-1}\tilde s(x).$$

Puisque $D = \cup_{i=1}^3 \Delta_{\beta_i}$ est contractible, on peut supposer que les $\tilde\sigma_i$, $i=1,..,3$ coïncident sur l'arête commune aux faces où elles sont définies. Elles forment donc une section $\sigma : D \to \tilde P^2_{|D}$ et l'application $\tilde u_D : \partial D \to \tilde G$ est donc le lacet $\tilde u_1.\tilde u_2.\tilde u_3$. Puisque $\tilde c$ est un cocycle, $\tilde c(\Delta_{\beta_4}) = -\tilde c(\Delta_{\beta_1}) - \tilde c(\Delta_{\beta_2}) - \tilde c(\Delta_{\beta_3})$, ce qui revient à dire que $\tilde u_4^{-1}$ est homotope à $\tilde u_1.\tilde u_2.\tilde u_3$. On peut donc déformer la section σ_4 de manière à ce qu'elle coïncide avec σ sur ∂D et obtenir ainsi une section de $\tilde P^2$ au dessus de $\partial\Delta_\alpha$.

Pour le 3-squelette X^3. Soit Δ_α un 3-simplexe. On pose $s_{\Delta_\alpha} = f^2 \circ \tilde s_{\partial\Delta_\alpha}$ et $u_\alpha(x) = \sigma_\alpha(x)^{-1}.s_{\partial\Delta_\alpha}(x)$. L'application $u_\alpha : \partial\Delta_\alpha \to G$ se relève en $\tilde u_\alpha : \partial\Delta_\alpha \to \tilde G$ car le π_2 d'un groupe de Lie est nul.[1] On recolle $\tilde P^3_\alpha = \Delta_\alpha \times \tilde G$ à $\tilde P^2$ par

$$\begin{array}{rccl} \psi_\alpha : & \partial\Delta_\alpha \times G & \longrightarrow & \tilde P^2_{|\partial\Delta_\alpha} \\ & (x,g) & \longmapsto & \tilde s_\alpha(x).\tilde u_\alpha(x)^{-1}.\tilde g. \end{array}$$

Il est immédiat de vérifier que $\forall (x,\tilde g) \in \partial\Delta_\alpha \times \tilde G$, $f_\alpha(x,\tilde g) = f^2(\psi_\alpha(x,\tilde g))$. On obtient ainsi $(\tilde P^3, f^3)$.

Soit Δ_α un 4-simplexe. On définit $Q_\alpha = (f^3)^{-1}(\sigma_\alpha(\partial\Delta_\alpha))$. C'est un K-fibré principal au dessus de $\sigma_\alpha(\partial\Delta_\alpha) \simeq \mathbb{S}^3$. Puisque le π_2 de toute composante de K est nulle, ce fibré est trivial. Il admet donc une section $q_\alpha : \sigma_\alpha(\partial\Delta_\alpha) \to Q_\alpha$. par conséquent $\tilde s_{\partial\Delta_\alpha} = q_\alpha \circ \sigma_\alpha$ est une section de $\tilde P^3_{|\partial\Delta_\alpha}$.

Pour le k-squelette X^k, $k > 3$. On procède par induction. Le groupe de Lie K étant abelien, le π_k de toute composante de K est nul. La suite exacte d'homotopie montre alors que la flèche $\pi_k(\rho) : \pi_k(\tilde G) \to \pi_k(G)$ est surjective. Par conséquent, si Δ_α est un k-simplexe, $u_\alpha : \partial\Delta_\alpha \to G$ se relève en $\tilde u_\alpha : \partial\Delta_\alpha \to \tilde G$. Si maintenant Δ_α est un $(k+1)$-simplexe le fibré $Q_\alpha = (f^{k+1})^{-1}(\sigma_\alpha(\partial\Delta_\alpha))$ est trivial ce qui fournit une section $\tilde s_{\partial\Delta_\alpha}$. □

[1] On utilise la propriété suivante. Si $\rho_\sharp : \pi_k(\tilde G) \to \pi_k(G)$ est surjective alors toute application $\gamma_0 : \mathbb{S}^k \to G$ se relève en $\tilde\gamma_0 : \mathbb{S}^k \to \tilde G$. En effet, soit $c = [\gamma_0] \in \pi_k(G)$, il existe $\tilde c \in \pi_k(\tilde G)$ tel que $\rho_\sharp \tilde c = c$. Soit $\tilde\gamma_1$ un représentant de $\tilde c$ et $\gamma_1 = \rho \circ \tilde\gamma_1$. On a une homotopie γ_t joignant γ_0 à γ_1, on l'écrit $\gamma : \mathbb{S}^k \times [0,1] \to G$. Le représentant $\tilde\gamma_1$ fournit une section de $\gamma^*\tilde G \to \mathbb{S}^k \times [0,1]$ au dessus de $\mathbb{S}^k \times \{1\}$. Cette section se prolonge en une section $\tilde\gamma : \mathbb{S}^k \times [0,1] \to \gamma^*\tilde G$ car $\mathbb{S}^k \times [0,1]$ se rétracte sur $\mathbb{S}^k \times \{1\}$ et $\tilde\gamma_0$ donne un relevé de γ_0.

STRUCTURES *Spin* ET $Spin^{\mathbb{C}}$ SUR UNE VARIÉTÉ. – On suppose que X est une variété riemannienne orientée et on note $P_{SO(n)} \to X$ le fibré des repères orientés de $TX \to X$. On s'intéresse aux deux extensions centrales :

$$Ad : Spin^{\mathbb{C}}(n) \to SO(n), \quad K = \mathbb{S}^1, \quad \text{et} \quad Ad : Spin(n) \to SO(n), \quad K = \mathbb{Z}_2.$$

Définition A. – Une structure *Spin* sur X est la donnée d'un relèvement de $P_{SO(n)} \to X$ à $Spin(n)$. Une structure $Spin^{\mathbb{C}}$ sur X est celle d'un relèvement de $P_{SO(n)} \to X$ à $Spin^{\mathbb{C}}(n)$.

Théorème. – *Soit X une variété riemannienne orientée. Alors :*
X admet une structure Spin $\iff w_2(X) = 0$,
X admet une structure $Spin^{\mathbb{C}}$ $\iff w_2(X) \in H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ se relève dans $H^2(X, \mathbb{Z})$.

Démonstration. – Il suffit juste de se rappeler que $\mathfrak{o}_{FX} \in H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ est donnée par $w_2(X)$ et que $\pi_1(Spin(n)) = 0$, $\pi_1(Spin^{\mathbb{C}}(n)) = \mathbb{Z}$. □

2. Classification des structures $Spin^{\mathbb{C}}$ en dimension paire

On commence par présenter une autre manière de voir une structure $Spin^{\mathbb{C}}$.

STRUCTURES $Spin^{\mathbb{C}}$ SUR UN ESPACE EUCLIDIEN. – Soit E_0 un espace euclidien de dimension $2n$ ou $2n+1$, une structure $Spin^{\mathbb{C}}$ sur E_0 est un couple (W_0, Γ_0) où W_0 est un espace hermitien de dimension 2^n et $\Gamma_0 : E_0 \to End(W_0)$ est une application linéaire vérifiant :

$$\Gamma_0(v)^* + \Gamma_0(v) = 0, \quad \Gamma_0(v)^*\Gamma_0(v) = |v|^2 Id.$$

Un isomorphisme $Spin^{\mathbb{C}}$ entre (E_0, W_0, Γ_0) et (E_1, W_1, Γ_1) est un couple (A, Φ) où $A \in SO(E_0, E_1)$ et $\Phi \in U(W_0, W_1)$, vérifient :

$$\forall v \in E_0, \quad \Phi\Gamma_0(v)\Phi^{-1} = \Gamma_1(Av).$$

On note $Hom_{Spin^{\mathbb{C}}}(\Gamma_0, \Gamma_1)$, ou encore $Hom_{Spin^{\mathbb{C}}}(W_0, W_1)$ (léger abus), l'ensemble des isomorphismes $Spin^{\mathbb{C}}$.

STRUCTURES $Spin^{\mathbb{C}}$ SUR UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE DE DIMENSION PAIRE. –

Définition B. – Une structure $Spin^{\mathbb{C}}$ sur une variété X de dimension $2n$ est la donnée d'un morphisme $\Gamma : TX \to End(W)$ où $W \to X$ est un fibré hermitien de rang 2^n et Γ satisfait aux relations : $\Gamma(v)^* + \Gamma(v) = 0, \quad \Gamma(v)^*\Gamma(v) = |v|^2 Id.$

A première vue, il n'est pas évident que les définitions A et B sont équivalentes.

DÉFINITION A $\Rightarrow$ DÉFINITION B. – Soient $\Gamma_0 : E_0 \to End(W_0)$ une structure $Spin^{\mathbb{C}}$ modèle sur un espace euclidien E_0 de dimension dim X et $\tilde{P}$ le relèvement à $Spin^{\mathbb{C}}$ de P. On peut alors construire $\tilde{P} \times_{Ad} E_0$, $\tilde{P} \times_{\Gamma_0} W_0$ [2] et

$$\begin{array}{rccl} \Gamma : & \tilde{P} \times_{Ad} E_0 & \longrightarrow & End(\tilde{P} \times_{\Gamma_0} W_0) \\ & (p, v) & \longmapsto & \Gamma(p, v) : (h, w) \mapsto (h, \Gamma_0(Ad_{h^{-1}p} v).w). \end{array}$$

[2] La structure $Spin^{\mathbb{C}}$ $\Gamma_0 : E_0 \to End(W_0)$ se prolonge de manière unique en $\Gamma_0 : Cl^{\mathbb{C}}(E_0) \to End(W_0)$ et fournit une représentation $\Gamma_0 : Spin^{\mathbb{C}}(E_0) \to End(W_0)$ qui à son tour permet de construire $\tilde{P} \times_{\Gamma_0} W_0$.

On pose $W = \tilde{P} \times_{\Gamma_0} W_0$. Puisque $TX \simeq \tilde{P} \times_{Ad} E_0$, on obtient bien une structure $Spin^{\mathbb{C}}$ au sens de la définition B.

Définition B $\Rightarrow$ définition A. – Ici encore on a besoin d'une structure $Spin^{\mathbb{C}}$ modèle (E_0, W_0, Γ_0). Soit

$$\tilde{P} = \{(x, A, \Phi) \mid x \in X, (A, \Phi) \in Hom_{Spin^{\mathbb{C}}}(W_0, W_x)\}$$

(on a noté W_x la fibre de $W \to X$ au dessus de x). Par construction, $\tilde{P} \to X$ est un $Spin^{\mathbb{C}}(n)$-fibré principal, c'est le fibré des repères de $W \to X$. Or $\tilde{P}$ relève $P_{SO(n)}$, la flèche $f : \tilde{P} \to P_{SO(n)}$ étant donnée par $f(x, A, \phi) = (x, A)$.

Définition. – Un isomorphisme $Spin^{\mathbb{C}}$ entre $\Gamma_1 : TX \to End(W_1)$ et $\Gamma_2 : TX \to End(W_2)$ est un isomorphisme unitaire de fibré $\Phi : W_1 \to W_2$ vérifiant $\Phi\Gamma_1 = \Gamma_2\Phi$.

Théorème. – *Si $\Gamma_1 : TX \to End(W_1)$ et $\Gamma_2 : TX \to End(W_2)$ sont deux structures $Spin^{\mathbb{C}}$ sur X alors il existe un fibré hermitien en droite $H \to X$ tel que :*

$$W_2 \simeq W_1 \otimes H, \quad \Gamma_2 \simeq \Gamma_1 \otimes Id.$$

Ces deux structures sont isomorphes $\iff$ $c_1(H) = 0$. Ainsi l'ensemble des structures $Spin^{\mathbb{C}}$ (à isomorphisme près) sur X s'identifie à $H^2(X, \mathbb{Z})$.

Démonstration. – Tout d'abord une remarque. Si $\Phi, \Psi : W_1 \to W_2$ sont deux isomorphismes $Spin^{\mathbb{C}}$, les conditions $\Phi_x\Gamma_1(v) = \Gamma_2(v)\Phi_x$ et $\Psi_x\Gamma_1(v) = \Gamma_2(v)\Psi_x$ impliquent $\Psi_x^{-1}\Phi_x\Gamma_1(v) = \Gamma_1(v)\Psi_x^{-1}\Phi_x$. Puisque les $\Gamma_1(v)$ engendrent $End(W_{1x})$, il faut donc : $\Psi_x^{-1}\Phi_x = zId$ avec $|z| = 1$.

Etant données deux structures $Spin^{\mathbb{C}}$, $\Gamma_1 : TX \to End(W_1)$ et $\Gamma_2 : TX \to End(W_2)$ (isomorphes ou non), on pose

$$Q = Q_{\Gamma_0,\Gamma_1} = \{(x, \Phi_x) \mid \Phi_x \in U(W_{1x}, W_{2x}), \Phi_x\Gamma_1(v) = \Gamma_2(v)\Phi_x, \ \ \forall v \in T_xX\}.$$

L'espace Q est donc un fibré en cercle sur X qui peut être vu comme le fibré unitaire d'un fibré hermitien en droites $\overline{Q} \to X$. Par construction Q admet une section si et seulement si Γ_1 et Γ_2 sont isomorphes. Soit $H \to X$ un fibré hermitien en droites. On pose $\tilde{W}_1 = W_1 \otimes H$ et $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \otimes Id$. On a

$$\overline{Q}_H = \overline{Q}_{\tilde{\Gamma}_1,\Gamma_2} = \overline{Q} \otimes H^*.$$

En effet, si Φ_x est un élément de Q_x, alors Φ_x est un générateur de $\overline{Q}_x$ et

$$(\overline{Q} \otimes H^*)_x = \{z\Phi_x \otimes \alpha_x \mid z \in \mathbb{C}, \alpha_x \in H_x^*\}.$$

Soit $w_1 \otimes h \in W_{1x} \otimes H_x$. On a

$$\begin{aligned}
(z\Phi_x \otimes \alpha_x)\tilde{\Gamma}_1(v)(w_1 \otimes h) &= (z\Phi_x \otimes \alpha_x)(\Gamma_1(v)(w_1) \otimes h) \\
&= z\Phi_x\Gamma_1(v)(w_1)\alpha_x(h), \\
\Gamma_2(v)(z\Phi_x \otimes \alpha_x)(w_1 \otimes h) &= \Gamma_2(v)z\Phi_x(w_1)\alpha_x(h) \\
&= z\Gamma_2(v)\Phi_x(w_1)\alpha_x(h).
\end{aligned}$$

donc $(z\Phi_x \otimes \alpha_x)\tilde{\Gamma}_1(v) = \Gamma_2(v)(z\Phi_x \otimes \alpha_x)$. D'autre part on vérifie facilement que

$$z\Phi_x \otimes \alpha_x \in \mathbb{C}U(W_{1x} \otimes H_x, W_{2x}) = \{\lambda A \mid \lambda \in \mathbb{C}, A \in U(W_{1x} \otimes H_x, W_{2x})\}.$$

Ainsi $(\overline{Q} \otimes H^*)_x \subset (\overline{Q}_H)_x$ et pour des raisons de dimension $(\overline{Q} \otimes H^*)_x = (\overline{Q}_H)_x$. Soit $H = \overline{Q}$, alors $\overline{Q} \otimes H^*$ est trivial. Pour un tel $H \to X$, le fibré $Q_H \to X$ admet une section ce qui fournit l'isomorphisme $W_2 \simeq W_1 \otimes H$. □

3. La dimension quatre

Théorème (H. Whitney, F. Hirzebruch, H. Hopf). – *Toute variété riemannienne fermée orientée de dimension 4 admet une structure $Spin^{\mathbb{C}}$.*

Voici quelques préliminaires.

La formule des coefficients universels. – Soient A un groupe abélien et X une variété, on a la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow Ext(H_{k-1}(X,\mathbb{Z}),A) \xrightarrow{i} H^k(X,A) \xrightarrow{\beta} Hom(H_k(X,\mathbb{Z}),A) \longrightarrow 0.$$

Si H est un groupe abélien écrit comme le quotient Z/B de deux groupes abéliens libres, alors $Ext(H,A) \simeq Hom(B,A)/Hom_Z(B,A)$ où $Hom_Z(B,A)$ est le groupe des homomorphismes de B dans A qui se prolongent sur Z.[3]

La dualité de Poincaré. – Si X est une variété de dimension n fermée et orientée on a un isomorphisme $D : H^k(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-k}(X,\mathbb{Z})$.

La forme d'intersection. – C'est la $\mathbb{Z}$-forme bilinéaire $I : H_{n-k}(X,\mathbb{Z}) \times H_k(X,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ définit par $I(a,b) = \beta(D^{-1}(a))(b)$. Notons que si a (ou b) est de torsion alors $I(a,b) = 0$. En effet, soit $p \in \mathbb{Z}^*$ tel que $pa = 0$, alors $I(pa,b) = 0$ ce qui implique $pI(a,b) = 0$ soit $I(a,b) = 0$.

Le crochet de Kronecker. – Il est défini par $< \, , \, >: H^k(X,\mathbb{Z}) \times H_k(X,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, $< a, b >= \beta(a)(b)$.

La formule de Wu. – Si X est une variété fermée orientée de dimension 4 et $I : H_2(X,\mathbb{Z}) \times H_2(X,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ sa forme d'intersection alors

$$\forall a \in H_2(X,\mathbb{Z}), \quad < w_2(X), a >= \rho_2(I(a,a)),$$

où $\rho_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ est la réduction modulo 2.

Démonstration du théorème.– Il suffit de montrer que $w_2(X) \in H^2(X,\mathbb{Z}_2)$ se relève dans $H^2(X,\mathbb{Z})$. Soit $\phi : H_2(X,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}_2$, $a \mapsto \rho_2(I(a,a))$. Ce morphisme s'annule sur $Tor(H_2(X,\mathbb{Z}))$, on peut donc le relever en un morphisme $\tilde{\phi} : H_2(X,\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$. On choisit un élément c dans $H^2(X,\mathbb{Z})$ tel que $\beta(c) = \tilde{\phi}$. Un tel élément existe car β est surjective. On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & Ext(H_1(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i} & H^2(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\beta} & Hom(H_2(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \rho_2 & & \downarrow \rho_2 & & \downarrow \rho_2 & \\
0 \longrightarrow & Ext(H_1(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{i} & H^2(X,\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\beta} & Hom(H_2(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2) & \longrightarrow 0.
\end{array}$$

[3] Cette définition de $Ext(H,A)$ ne dépend pas du choix de la présentation de H comme quotient Z/B.

La formule de Wu montre que :

$$\beta(w_2(X))(a) =< w_2(X), a >= \rho_2(I(a,a)) = \rho_2(\tilde{\phi}(a)) = \rho_2(\beta(c)(a)) = \beta(\rho_2(c))(a)$$

i. e. $\beta(w_2(X) - \rho_2 c) = 0$. Donc il existe $e \in Ext(H_1(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2)$ tel que $w_2(X) = \rho_2 c + i(e)$. Or $Ext(H_1(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \to Ext(H_1(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_2)$ est surjectif car tout morphisme $\varphi : B \to \mathbb{Z}_2$ se relève en un morphisme $\tilde{\varphi} : B \to \mathbb{Z}$ car B est libre. Il existe donc $\tilde{e} \in Ext(H_1(X,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ tel que $\rho_2\tilde{e} = e$ et $c + i(\tilde{e})$ relève $w_2(X)$. □

4. Bibliographie

Voici mes principales sources d'inspiration.

D. Salamon, *Spin Geometry and Seiberg-Witten Invariants*, à paraître.
E. Giroux et B. Sevennec, *Notes du cours "Invariants de Seiberg-Witten"*.

Institut Girard Desargues – UPRES-A 5028 du CNRS, Université Claude Bernard, Lyon 1, 43, boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France
E-mail address: borrelli@desargues.univ-lyon1.fr