CM1 : Le théorème de Whitney-Graustein

Hassler Whitney

Les immersions du cercle

On note $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le cercle. Notons qu'une application $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ n'est rien d'autre qu'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ 1-périodique.

Les immersions du cercle

On note $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le cercle. Notons qu'une application $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ n'est rien d'autre qu'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ 1-périodique.

Définition. – Une application $\gamma : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$, est dite *régulière* si pour tout x de $\mathbb{S}^1$ on a $\gamma'(x) \neq 0$. On dit aussi que γ est une *immersion* de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^n$.

Les immersions du cercle

On note $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le cercle. Notons qu'une application $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ n'est rien d'autre qu'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ 1-périodique.

Définition. – Une application $\gamma : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$, est dite *régulière* si pour tout x de $\mathbb{S}^1$ on a $\gamma'(x) \neq 0$. On dit aussi que γ est une *immersion* de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^n$.

On note $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des immersions de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^n$. C'est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$. Muni la norme C^1 définie par

$$\|\gamma\|_{C^1} = \|\gamma'\|_\infty + \|\gamma\|_\infty.$$

l'espace vectoriel $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach et $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ un ouvert de cet espace de Banach.

Les immersions du cercle

On note $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le cercle. Notons qu'une application $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ n'est rien d'autre qu'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ 1-périodique.

Définition. – Une application $\gamma : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$, est dite *régulière* si pour tout x de $\mathbb{S}^1$ on a $\gamma'(x) \neq 0$. On dit aussi que γ est une *immersion* de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^n$.

On note $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des immersions de $\mathbb{S}^1$ dans $\mathbb{R}^n$. C'est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$. Muni la norme C^1 définie par

$$\|\gamma\|_{C^1} = \|\gamma'\|_\infty + \|\gamma\|_\infty.$$

l'espace vectoriel $C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach et $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ un ouvert de cet espace de Banach.

Remarque.– On notera souvent $\|\cdot\|_{C^0}$ plutôt que $\|\cdot\|_\infty$.

Les immersions du cercle

Définition.– Soient $\gamma_0, \gamma_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux immersions, une *homotopie régulière* joignant γ_0 à γ_1 est une application

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : & [0,1] & \xrightarrow{C^0} & I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \\ & s & \longmapsto & \gamma_s \end{array}$$

telle que $\Gamma_0 = \gamma_0$, $\Gamma_1 = \gamma_1$.

Les immersions du cercle

Définition.– Soient $\gamma_0, \gamma_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux immersions, une *homotopie régulière* joignant γ_0 à γ_1 est une application

$$\begin{array}{cccc} \Gamma : & [0,1] & \stackrel{C^0}{\longrightarrow} & I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \\ & s & \longmapsto & \gamma_s \end{array}$$

telle que $\Gamma_0 = \gamma_0$, $\Gamma_1 = \gamma_1$.

Remarque.– La relation d'homotopie régulière est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence s'identifient aux composantes connexes par arcs de l'espace des immersions $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$.

Les immersions du cercle

Définition.– Soient $\gamma_0, \gamma_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux immersions, une *homotopie régulière* joignant γ_0 à γ_1 est une application

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : & [0,1] & \xrightarrow{C^0} & I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) \\ & s & \longmapsto & \gamma_s \end{array}$$

telle que $\Gamma_0 = \gamma_0$, $\Gamma_1 = \gamma_1$.

Remarque.– La relation d'homotopie régulière est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence s'identifient aux composantes connexes par arcs de l'espace des immersions $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$.

On suppose désormais que $\mathbb{R}^n$ est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition.– Une immersion $\gamma : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$, est dite *paramétrée par la longueur d'arc* si pour tout x de $\mathbb{S}^1$ on a $\|\gamma'(x)\| = 1$. On note $I_1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ l'espace des immersions paramétrées par la longueur d'arc.

Les immersions du cercle

Proposition.– *Toute immersion* $\gamma_0 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est régulièrement homotope à une immersion paramétrée par la longueur d'arc.*

Les immersions du cercle

Proof.– Notons

$$L(\gamma_0) = \int_0^1 \|\gamma_0'(x)\| dt$$

la longueur de γ_0. Quitte à effectuer une première homotopie régulière en composant γ_0 à gauche par une famille d'homothéties, on peut toujours supposer que la longueur de γ_0 est $L = 1$. On considère la fonction abscisse curviligne

$$\begin{array}{rccc} S: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & s & \longmapsto & \displaystyle\int_0^s \|\gamma_0'(x)\| dx. \end{array}$$

Cette fonction est dérivable et puisque $S'(s) = \|\gamma_0'(s)\| > 0$, elle est strictement croissante. C'est donc un difféomorphisme de $[0,1]$ dans lui-même.

Les immersions du cercle

Soit $\gamma_1 := \gamma_0 \circ S^{-1}$. Puisque

$$(S^{-1})'(x) = \frac{1}{S'(S^{-1}(x))} = \frac{1}{\|\gamma_0'(S^{-1}(x))\|}$$

on a

$$\gamma_1'(x) = \frac{\gamma_0'(S^{-1}(x))}{\|\gamma_0'(S^{-1}(x))\|}$$

et par conséquent γ_1 est paramétrée par la longueur d'arc. Soit $\varphi_t : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ définie par

$$\varphi_t = tS^{-1} + (1-t)Id$$

Pour tout $t \in [0,1]$, l'application φ_t est un difféomorphisme puisque

$$\forall x \in [0,1], \quad \varphi_t'(x) = \frac{1}{\|\gamma_0'(S^{-1}(x))\|} + (1-t) > 0.$$

Ainsi $t \mapsto \gamma_t = \gamma_0 \circ \varphi_t$ réalise une homotopie régulière joignant γ_0 à γ_1.
$\square$

Immersions en dimension $n \geq 3$.

Théorème.– *Deux immersions* $\gamma_0, \gamma_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, *$n \geq 3$, sont toujours régulièrement homotopes, autrement dit*

$$\pi_0 I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n) = \{0\}$$

i. e. $I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$ *est connexe par arcs si* $n \geq 3$.

Immersions en dimension $n \geq 3$.

Idée de la démonstration.– Quitte à effectuer deux homotopies régulières préalables, on peut toujours supposer que γ_0 et γ_1 sont paramétrées par la longueur d'arc. Modulo des translations, on peut également supposer $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = O$ où O est l'origine de $\mathbb{R}^n$. Les applications dérivées γ_0' et γ_1' sont donc à valeur dans la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$. Puisque $n \geq 3$, la sphère $\mathbb{S}^{n-1}$ est simplement connexe. Il en découle qu'il existe une homotopie $\sigma : [0,1] \longrightarrow C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^{n-1})$ telle que $\sigma_0 = \gamma_0'$ et $\sigma_1 = \gamma_1'$. L'idée naturelle est de définir une homotopie régulière entre γ_0 et γ_1 en posant pour tout $x \in [0,1]$:

$$g_t(x) := \int_0^x \sigma_t(x)dx.$$

Notons que puisque $g_t'(x) = \sigma_t(x) \in \mathbb{S}^{n-1}$, l'application g_t est une immersion pour tout $t \in [0,1]$. On a également $g_0 = \gamma_0$ et $g_1 = \gamma_1$ mais en revanche rien n'assure que $g_t(0) = g_t(1)$.

Immersions en dimension $n \geq 3$.

C'est la raison pour laquelle on modifie cette homotopie régulière de la façon suivante. Pour tout $x \in [0,1]$, on considère

$$\gamma_t(x) := \int_0^x \sigma_t(x)dt - x\int_0^1 \sigma_t(x)dx.$$

On a cette fois $\gamma_t(0) = \gamma_t(1)$ pour tout $t \in [0,1]$ mais c'est le caractère immersif qui pose désormais problème. En effet, rien n'assure *a priori* que

$$\gamma_t'(x) = \sigma_t(x) - \int_0^1 \sigma_t(x)dx$$

soit non nul. L'observation cruciale est la suivante : puisque σ_t est à valeur dans $\mathbb{S}^{n-1}$, sa moyenne $\int_0^1 \sigma_t(x)dx$ est un point de la boule fermée $\overline{B}(O,1)$ de centre l'origine O et de rayon 1, elle est même dans la boule ouverte $B(O,1)$ si σ_t n'est pas une application constante.

Immersions en dimension $n \geq 3$.

Dans ce dernier cas on a donc

$$\|\sigma_t(x)\| = 1 \quad \text{et} \quad \left\| \int_0^1 \sigma_t(x)dx \right\| < 1$$

ce qui montre que $\gamma_t'(x) \neq 0$. On termine la démonstration en montrant que l'on peut toujours choisir l'homotopie σ telle que σ_t ne soit jamais l'application constante quel que soit $t \in [0, 1]$. On ne le fera pas ici. Les arguments permettant de montrer l'existence d'une telle homotopie reposent sur le théorème de transversalité de Thom. $\square$

Le théorème de Whitney-Graustein

On s'intéresse désormais au cas $n = 2$. Si $\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ est une immersion alors son application tangente fournit une application continue

$$\gamma' : \mathbb{S}^1 \to \mathcal{R} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

dont on peut calculer le nombre de tours $N(\gamma')$. Rappelons que

$$N(\gamma') := \widetilde{t}(1) - \widetilde{t}(0) \in \mathbb{Z}$$

où $\widetilde{t} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est un relevé de

$$t := \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

On définit l'indice $Ind(\gamma)$ de γ comme étant le nombre de tours $N(\gamma')$.

Le théorème de Whitney-Graustein

Puisque $Ind(\gamma)$ est clairement invariant par homotopie régulière, on a une application :

$$\begin{array}{rccc} Ind: & \pi_0 I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & [\gamma] & \longmapsto & Ind(\gamma). \end{array}$$

Cette application est surjective comme le montre l'examen des exemples ci-dessous :

$\cdots$  $\cdots$

$Ind(\gamma) = -1$ $\quad Ind(\gamma) = 0$ $\quad Ind(\gamma) = 1$ $\quad Ind(\gamma) = 2$ $\quad Ind(\gamma) = 3$

Le théorème de Whitney-Graustein

Le point important est que cette application est en réalité une bijection.

Théorème de Whitney-Graustein (1937). – *Deux immersions* $\gamma_0, \gamma_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *sont régulièrement homotopes si et seulement si elles ont le même indice :* $Ind(\gamma_0) = Ind(\gamma_1)$. *En d'autres termes*

$$\pi_0 I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \simeq \mathbb{Z}$$

l'identification étant donnée par l'indice.

Le théorème de Whitney-Graustein

Idée de la démonstration. – Il suffit d'établir l'injectivité de I. Soient γ_0, γ_1 telle que $N(\gamma_0') = N(\gamma_1')$. Quitte à effectuer une première homotopie régulière on peut toujours supposer que γ_0 et γ_1 sont paramétrées par la longueur d'arc et que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = O$. Notons qu'alors γ_0' et γ_1' sont à valeur dans $\mathbb{S}^1$. Puisque $N(\gamma_0') = N(\gamma_1')$ cela signifie qu'il existe une homotopie

$$\sigma_t : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

telle que $\sigma_0 = \gamma_0'$ et $\sigma_1 = \gamma_1'$. Supposons, comme dans la démonstration du théorème précédent, que l'on a choisi $\sigma : [0,1] \longrightarrow C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$ telle que σ_t ne soit jamais constant. Pour tout $x \in [0,1]$, on pose alors

$$\gamma_t(x) := \int_0^x \sigma_t(x)dt - x\int_0^1 \sigma_t(x)dx$$

qui convient. $\square$

H-principe pour les immersions du cercle

Dire qu'une application $\gamma : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$ est une immersion, c'est demander que γ' soit à valeur dans $\mathcal{R} = \mathbb{R}^n \setminus \{O\}$. On appelle donc $\mathcal{R}$ la *relation différentielle* de notre problème. Une application $\sigma \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathcal{R})$ étant donnée, elle n'est pas en général la dérivée d'une application $\gamma \in C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^n)$. Lorsque c'est le cas, on dit que σ est *holonome* et que $\gamma = \int_0^x \sigma$ est une *solution* de la relation différentielle $\mathcal{R}$.

Étant données deux immersions γ_0 et γ_1 la recherche d'une éventuelle homotopie régulière les joignant s'est effectuée en deux temps :

1) La mise en évidence d'une homotopie $\sigma : [0,1] \longrightarrow C^0(\mathbb{S}^1, \mathcal{R})$ joignant γ_0' à γ_1'

2) La déformation de cette homotopie σ en une homotopie holonome

$$t \mapsto \sigma_t - \int_0^1 \sigma_t dx$$

joignant γ_0' à γ_1'.

H-principe pour les immersions du cercle

Notons que la première étape est un problème purement topologique et que c'est elle, et elle seule, qui est à l'origine de la différence entre le théorème de classification des immersions du cercle en dimension $n \geq 3$ et en dimension 2. Autrement dit, pour la classification des immersions du cercle, une fois le problème homotopique résolu (étape 1), la seconde étape (l'existence d'une homotopie régulière) est automatique. Lorsque l'existence de solutions à une relation différentielle $\mathcal{R}$ se réduit à une question topologique du type de l'étape 1, on dit qu'elle vérifie le *h*-principe (ou principe homotopique). Il s'avère que de nombreuse relations en géométrie différentielle satisfont le *h*-principe. Nous en découvrirons quelques unes dans ce cours.