# CM2 : Le théorème de Smale

Stephen Smale

# Immersions

**Définition. –** Soit $M^m$ une variété $C^1$. Une application $f : M^m \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$, $m \leq n$, est une *immersion* si lue sur les cartes, elle est de rang maximum i. e. $\forall x \in M^m, \quad rang\ df_x = m$.

On note $I(M^m, \mathbb{R}^n)$ l'espace des immersions de $M^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Il est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts des applications et de leurs différentielles. Soit $(K_n)$ une famille dénombrable de compacts recouvrant $M^m$, la topologie de $C^1(M^m, \mathbb{R}^n)$ est métrisable à partir de la famille des semi-métriques suivantes :

$$d_{K_n}(f,g) = \sup_{x \in K_n} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in K_n} |df_x - dg_x|$$

Bien sûr, si $M^m$ est compacte, on peut réduire la famille $(K_n)$ à un seul élément et $I(M^m, \mathbb{R}^n)$ est un ouvert dans l'espace de Banach $(C^1(M^m, \mathbb{R}^n), \| \cdot \|_{C^1})$ où

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_{C^0} + \|df\|_{C^0}.$$

# Immersions

**Définition.–** Soient $f_0, f_1 : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux immersions, une *homotopie régulière* joignant $f_0$ à $f_1$ est une application

$$F : [0,1] \xrightarrow{C^0} I(M^m, \mathbb{R}^n)$$

telle que $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$.

La relation d'homotopie régulière est une relation d'équivalence et les classes d'équivalence s'identifient aux composantes connexes par arcs de l'espace des immersions $I(M^m, \mathbb{R}^n)$.

# Immersions

**Micro-extension.–** On rappelle qu'une variété $M^m$ est orientable si l'on peut décider de façon cohérente le sens des bases de $T_xM^m$ pour tout $x \in M^m$. Soit $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ une immersion. Si $M^m$ est orientable alors on définit une application normale unitaire $\nu : M^m \longrightarrow \mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ en posant pour tout $x \in M^m$

$$\nu(x) = \frac{df_x(e_1) \wedge ... \wedge df_x(e_m)}{\|df_x(e_1) \wedge ... \wedge df_x(e_m)\|}$$

où $(e_1, ..., e_n)$ est une base directe quelconque de $T_xM^m$. Pour tout $\epsilon > 0$, on définit ensuite une application $f_\epsilon : M^m \times ] - 1, 1[ \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ par

$$f_\epsilon(x, z) = f(x) + \epsilon z \nu.$$

# Immersions

**Propriété (de la micro-extension).–** *Si $M^m$ est compacte et orientable, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel pour tout $0 < \epsilon < \epsilon_0$, l'application de micro-extension $f_\epsilon : M \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ soit une immersion.*

# Immersions

**Démonstration.–** La condition du rang est ouverte. Puisque *rang* $(df_\epsilon)(x,0) = m+1$, cette propriété restera vraie sur un voisinage ouvert de $M\times]-1,1[$. Considérons la micro-extension $f_1$ (i. e. $\epsilon = 1$). Puisque $M^m$ est compacte, l'ensemble des points sur lequel $f_1$ est une immersion contient un sous-voisinage de la forme $M\times]-a,a[$ avec $a>0$. Mais alors, l'ensemble des points sur lequel $f_\epsilon$ est une immersion contient $M\times]-\frac{a}{\epsilon},\frac{a}{\epsilon}[$. Le choix $\epsilon_0 = a$ convient. $\square$

# Immersions

La propriété de la micro-extension affirme en particulier que si $M^m$ est une variété compacte orientable, l'existence d'une immersion $f : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ est équivalente à l'existence d'une immersion équidimensionnelle $g : M^m \times \,]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$.

**Définition.–** Soit $W^{m+1}$ une variété $C^1$ orientée et $g : W^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ une immersion. On dira que $g$ est directe si pour tout point $w \in W^{m+1}$ l'image d'une base directe de $T_w W^{m+1}$ par $dg_w$ est une base directe de $\mathbb{R}^{m+1}$.

**Observation.–** Le caractère directe ou indirecte d'une immersion $g : W^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ se conserve par homotopie régulière.

# Immersions

On note $I_+(W^{m+1}, \mathbb{R}^{m+1})$ et $I_-(W^{m+1}, \mathbb{R}^{m+1})$ l'espace des immersions directes et indirectes.

Une version à paramètre de la propriété de la micro-extension montre que (sous les mêmes hypothèses) si $f_0$ et $f_1$ sont deux immersions de $M^m$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$, l'existence d'une homotopie régulière joignant $f_0$ à $f_1$ est équivalente à l'existence d'une homotopie régulière joignant leurs micro-extensions $g_0$ et $g_1$. On a donc le résultat suivant :

**Corollaire.–** *Soit* $\rho : I_+(M^m \times ]-1,1[, \mathbb{R}^{m+1}) \longrightarrow I(M^m, \mathbb{R}^{m+1})$ *l'application restriction définie par* $\rho(g) = g(., 0)$. *Cette application induit une bijection au niveau des composantes connexes par arcs :*

$$\pi_0\rho : \pi_0 I_+(M^m \times ]-1,1[, \mathbb{R}^{m+1}) \xrightarrow{\simeq} \pi_0 I(M^m, \mathbb{R}^{m+1}).$$

# Immersions des surfaces orientables

Il est bien connu que l'on peut réaliser toute surface compacte fermée orientée comme une sous-variété $\Sigma^2$ de $\mathbb{R}^3$. Le but de cette section est de chercher une obstruction à l'existence d'une homotopie régulière joignant deux immersions données de $\Sigma^2$ dans $\mathbb{R}^3$ et pour cela, nous allons avoir recours à la micro-extension.

Notons $\mathbf{\Sigma}^3$ un voisinage tubulaire ouvert de $\Sigma^2$. Puisque $\Sigma^2$ est orientable, ce voisinage est difféomorphe à $\Sigma^2 \times \,]-1,1[$. La différentielle $dg$ d'une immersion $g : \mathbf{\Sigma}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une application continue de cet ouvert dans $Gl(\mathbb{R}^3)$. Si $g_0$ et $g_1$ sont régulièrement homotopes alors leurs applications différentielles $dg_0$ et $dg_1$ seront homotopes. Il est traditionnel de noter $[X, Y]$ les classes d'homotopie des applications de $X$ vers $Y$, autrement dit $[X, Y] = \pi_0 C^0(X, Y)$.

# Immersions des surfaces orientables

On vient de constater que :

**Lemme.–** *La différentielle*

$$d : I(\mathbf{\Sigma}^3, \mathbb{R}^3) \longrightarrow C^0(\mathbf{\Sigma}^3, Gl(\mathbb{R}^3))$$

*induit une application entre les composantes connexes par arcs des deux espaces*

$$\pi_0 d : \pi_0 I(\mathbf{\Sigma}^3, \mathbb{R}^3) \longrightarrow [\mathbf{\Sigma}^3, Gl(\mathbb{R}^3)]$$

Si $g : \mathbf{\Sigma}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion directe alors $dg$ est à valeur dans $Gl_+(\mathbb{R}^3)$ et puisque $\pi_0 I_+(\mathbf{\Sigma}^3, \mathbb{R}^3) \simeq \pi_0 I(\Sigma^2, \mathbb{R}^3)$, la composée $\pi_0 d \circ (\pi_0 \rho)^{-1}$ induit une application

$$\pi_0 I(\Sigma^2, \mathbb{R}^3) \longrightarrow [\mathbf{\Sigma}^3, Gl_+(\mathbb{R}^3)]$$

# Immersions des surfaces orientables

**Définition** On dit que deux espaces topologiques $X$ et $Y$ sont *homotopiquement équivalents* s'il existe deux applications continues $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow X$ telles que $f \circ g$ soit homotope à $id_Y$ et $g \circ f$ soit homotope à $id_X$.

**Exemples.–** 1) Les espaces $\Sigma^2$ et $\mathbf{\Sigma}^3$ sont homotopiquement équivalents. Il suffit pour le voir de considérer l'inclusion canonique $i : \Sigma^2 \longrightarrow \mathbf{\Sigma}^3$ et la projection $p : \mathbf{\Sigma}^3 \longrightarrow \Sigma^2$.
2) Les espaces $SO(3)$ et $Gl_+(3)$ sont homotopiquement équivalents (inclusion et Gram-Schmidt)

# Immersions des surfaces orientables

Si $X$ et $Y$ sont homotopiquement équivalents alors la composition

$$\begin{array}{ccc} C^0(X,Z) & \longrightarrow & C^0(Y,Z) \\ h & \longmapsto & h\circ g \end{array}$$

induit une bijection entre $[X,Z]$ et $[Y,Z]$. De même la composition $h \mapsto f\circ h$ induit une bijection entre $[Z,X]$ et $[Z,Y]$.

**Proposition.–** *Soit $\Sigma^2$ une surface compacte, fermée, orientable. La différentielle induit une application*

$$\pi_0 I(\Sigma^2,\mathbb{R}^3) \longrightarrow [\Sigma^2, SO(3)]$$

# Immersions des surfaces orientables

**Notation.–** Dans la pratique, on commet systématiquement l'abus de noter cette application $d$ et de l'appeler "différentielle".

Ce que l'on vient de faire n'est pas spécifique à la dimension deux et se généralise sans aucune peine en dimension quelconque.

**Proposition.–** *Soit $M^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ une hypersurface compacte, fermée (et donc, orientable). La différentielle induit une application*

$$\pi_0 I(M^m, \mathbb{R}^{m+1}) \longrightarrow [M^m, SO(m+1)].$$

# Immersions des surfaces orientables

**Obstruction.–** L'intérêt d'une telle proposition est le suivant. Étant données deux immersions $f_0, f_1 : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, la question de l'existence une homotopie régulière joignant l'une à l'autre est une question difficile. Dans un premier temps, on préfère considérer à sa place la question purement topologique de l'existence d'une "simple" homotopie entre $df_0$ et $df_1$. Si les différentielles définissent deux éléments différents de $[M^m, SO(m+1)]$ alors $f_0$ et $f_1$ ne peuvent être régulièrement homotopes. En revanche, si elles définissent le même élément, on ne peut rien affirmer concernant l'existence d'une homotopie régulière entre $f_0$ et $f_1$. On dit que l'existence d'une homotopie entre $df_0$ et $df_1$ est une *obstruction* à l'existence d'une homotopie régulière entre $f_0$ et $f_1$.

# Immersions des surfaces orientables

**Le cas $m = 1$.–** Dans ce cas $M^1$ ne peut être que le cercle $\mathbb{S}^1$ et puisque le groupe de Lie $SO(2)$ est isomorphe à $U(1) = \mathbb{S}^1$, l'ensemble $[M^m, SO(m+1)]$ se réduit donc à $\pi_0 C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \pi_0 I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) & \longrightarrow & [\mathbb{S}^1, SO(2)] \simeq \mathbb{Z} \\ \gamma & \longmapsto & [d\gamma] \end{array}$$

n'est rien d'autre que l'indice *Ind* de $\gamma$. Le théorème de Whitney-Graustein affirme qu'elle est bijective. En particulier, l'indice est la seule obstruction à l'existence d'une homotopie régulière entre deux immersions du cercle.

# Immersions des surfaces orientables

**Le cas $M^m = \mathbb{S}^m$.–** L'ensemble $[M^m, SO(m+1)]$ est alors en bijection avec $\pi_m SO(m+1)$. Ce point n'est pas totalement immédiat car le groupe $\pi_m(X)$ compte les homotopies *pointées* d'applications de $(\mathbb{S}^m, *)$ dans $(X, *)$. Un espace $X$ est pointé lorsque l'on distingue un point de cet espace. On le note souvent $*_X$. Une application pointée $f : (X, *_X) \longrightarrow (Y, *_Y)$ est une application telle que $f(*_X) = *_Y$. Une homotopie pointée est donc plus contrainte qu'une homotopie usuelle, dite *libre*. Il s'avère (et nous l'admettrons) que cette contrainte n'a aucune conséquence ici et que les deux ensembles $[M^m, SO(m+1)]$ et $\pi_m SO(m+1)$ sont en bijection.

# Immersions des surfaces orientables

Les groupes $\pi_m SO(m+1)$ ont été déterminés dans les années 50 et les résultats obtenus sont les suivants :

| $m$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_m SO(m+1)$ | $\mathbb{Z}$ | 0 | $\mathbb{Z}^2$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}$ | 0 | $\mathbb{Z}^2$ |

et si $m = 8s + r$ avec $s \geq 1$ et $0 \leq r \leq 7$ :

| $r$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\pi_{8s+r} SO(8s+r+1)$ | $\mathbb{Z}_2^2$ | $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}^2$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}^2$ |

En particulier, il n'existe que deux valeurs pour lesquelles $\pi_m SO(m+1) = \{0\}$. Il s'agit de $m = 2$ et $m = 6$. Pour ces deux dimensions, la différentielle ne fait jamais obstruction à l'existence d'une homotopie régulière.

# Le théorème de Smale

L'annulation du deuxième groupe d'homotopie de $SO(3)$ fait disparaître *de facto* l'obstruction "évidente" à l'existence d'une homotopie régulière entre les immersions de $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. Elle ne signifie pas *a priori* qu'une homotopie régulière existe bel et bien entre deux immersions arbitraire de la sphère. C'est pourtant le cas.

**Théorème (Smale, 1957).–** *L'application*

$$\pi_0 I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3) \longrightarrow [\mathbb{S}^2, SO(3)] \simeq \pi_2 SO(3) = \{0\}$$

*est une bijection. En particulier, l'espace $I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$ est connexe par arcs.*

Nous démontrerons ce théorème plus tard avec les outils de la théorie de l'intégration convexe.

# Le théorème de Smale

**Le retournement de la sphère.–** Notons **S** la sphère épaissie

$$\mathbf{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - \epsilon^2 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1 + \epsilon^2\}$$

où $0 < \epsilon < 1$ est fixé. On munit **S** de l'orientation induite par $\mathbb{R}^3$. On note $f_0 : \mathbf{S} \subset \mathbb{R}^3$ l'inclusion naturelle et on considère l'inversion

$$\begin{array}{rccc} inv : & \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{\|x^2\|} \end{array}$$

Notons que $inv_{|\mathbf{S}}$ est une immersion *indirecte* de **S** dans $\mathbb{R}^3$. Les immersions $f_0$ et $inv_{|\mathbf{S}}$ ne peuvent être régulièrement homotopes. En revanche $f_1 := -inv_{|\mathbf{S}}$ est une immersion directe.

# Le théorème de Smale

La propriété de la micro-extension implique que

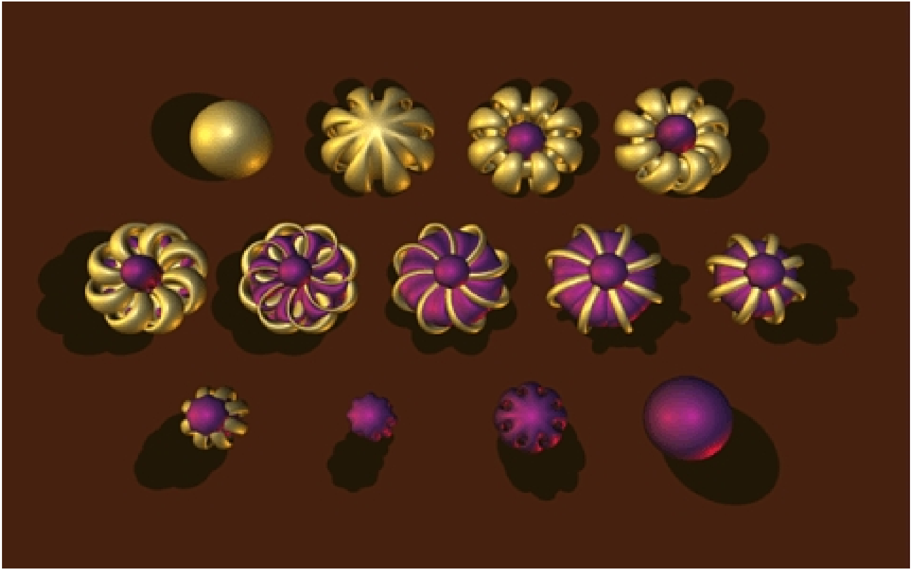
$$\pi_0 I_+(\mathbf{S}, \mathbb{R}^3) \xrightarrow{\simeq} \pi_0 I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3).$$

D'après le théorème de Smale, $\pi_0 I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3) = \{0\}$. Les immersions $f_0$ et $f_1$ sont donc régulièrement homotopes.

**Définition.–** On appelle *retournement de la sphère* toute homotopie régulière joignant $f_0$ à $f_1$.

**Corollaire (Smale, 1957).–** *On peut retourner la sphère ronde* $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ *parmi les immersions.*

# Le théorème de Smale



Principales étapes d'un retournement de la sphère imaginé par William Thurston


vimeo
Connexion
Hébergez des vidéos
Regarder
On Demand
Mettre en ligne
La machine à démanteler les impossibles de
Mikhaïl Gromov
1:30:57
HD