CM3 : Le *h*-principe : préquelle

Moris Hirsch

Le fibré des 1-jets

Définition. – Soit $U \subset \mathbb{R}^m$. L'espace des 1-jets des applications de U dans $\mathbb{R}^n$ est le produit

$$J^1(U, \mathbb{R}^n) = U \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Le 1-*jet de* $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ en x est le triplet :

$$j^1 f(x) = (x, f(x), df_x) \in U \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Tout choix de coordonnées permet d'identifier $J^1(U, \mathbb{R}^n)$ avec le produit

$$J^1(U, \mathbb{R}^n) \approx U \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n)$$

et le 1-jet $j^1 f(x)$ avec

$$j^1 f(x) \approx \left(x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \right).$$

Le fibré des 1-jets

Définition. – Soient $p : X \longrightarrow M$ un fibré, une *section* de X est une application $\sigma : M \longrightarrow X$ telle que $p \circ \sigma = id_M$. L'espace des sections C^r de X est noté $\Gamma^r(X)$.

Définition. – Soient $p : X \longrightarrow M$ un fibré vectoriel, $x \in M$ et $\sigma_1, \sigma_2 : U \longrightarrow X$ deux sections C^1 au dessus d'un voisinage trivialisant U de x. On dit que σ_1 et σ_2 sont *équivalentes en* x si, dans un système de coordonnées, elles ont la même valeur et les mêmes dérivées en x. Une classe d'équivalence sous cette relation est appelée un *jet d'ordre 1 en* x. L'espace des 1-jets est noté $X^{(1)}$.

Le fibré des 1-jets

Le 1-jet d'une section (locale) σ en x est le couple

$$j^1\sigma(x) = (\sigma(x), d\sigma_x)$$

où $d\sigma_x : T_xM \longrightarrow T_{\sigma(x)}X$. L'espace des *1-jets des sections locales* de X est l'espace

$$X^{(1)} = \{(y, L) \mid y \in X, L \in \mathcal{L}(T_xM, T_yX) \text{ et } dp_y \circ L = id_{T_xM}\}$$

et $x = p(y)$.

Le fibré des 1-jets

Remarques.– 1) Si $p : M \times N \longrightarrow M$ est le fibré trivial, une section $\sigma : M \longrightarrow M \times N$ s'écrit $\sigma(x) = (x, f(x))$ avec $f \in C^1(M, N)$. Le 1-jet de σ s'identifie au triplet $(x, f(x), df_x)$. Dans ce cas l'espace des 1-jets des sections de p s'identifie à

$$J^1(M, N) = \{(x, y, L) \mid x \in M,\ y \in N, L \in \mathcal{L}(T_xM, T_yN)\}.$$

qui est appelé l'espace des 1-jets des applications de M dans N.

2) La projection naturelle

$$\begin{array}{rccc} p^1 : & X^{(1)} & \longrightarrow & X \\ & (y, L) & \longmapsto & y \end{array}$$

définit une structure de fibré, la fibre au dessus de y étant

$$(p^1)^{-1}(y) = \{L \in \mathcal{L}(T_xM, T_yX) \mid dp_y \circ L = id_{T_xM}\}$$

où $x = p(y)$.

Relations différentielles, *h*-principe

Définition.– Soit $X \longrightarrow M^m$ une fibration. Une *relation différentielle* d'ordre 1 portant sur les sections $\Gamma(X)$ de classe C^1 est un sous-ensemble $\mathcal{R}$ de l'espace des 1-jets $X^{(1)}$.

Exemple 1.– Un système d'équations aux dérivées partielles

$$\Phi\left(x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right) = 0$$

où $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $f : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\Phi : J^1(U, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^q$ définit naturellement une relation différentielle $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{R} = \{(x, y, v_1, \ldots, v_m) \mid \Phi(x, y, v_1, \ldots, v_m) = 0\}.$$

Ici X est le fibré trivial $U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow U$ et $X^{(1)} = J^1(U, \mathbb{R}^n)$.

Relations différentielles, *h*-principe

Exemple 2.– Soit $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2$. Une application $\gamma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une immersion si pour tout $x \in \mathbb{S}^1$ on a $\gamma'(x) \neq 0$. Cette condition définit une relation différentielle

$$\mathcal{R} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \subset X^{(1)} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Exemple 3.– Soit $X = M^m \times N^n \longrightarrow M^m$. On dit que $f : M^m \longrightarrow N^n$

est une immersion si, en tout point $p \in M^m$, on a $rg\ df_p = m$. Cette condition définit une relation différentielle

$$\mathcal{R} = \{(x, y, L_{x,y}) \mid L_{x,y} \in \ Mono(T_x M, T_y N)\} \subset X^{(1)} = J^1(M, N).$$

où on a noté $Mono(T_x M, T_y N)$ l'espace vectoriel des monomorphismes (=applications linéaires injectives) de $T_x M$ dans $T_y N$.

Relations différentielles, h-principe

Exemple 4.– Soit $X = \Lambda^p T^* M^m \longrightarrow M^m$. La condition de fermeture des p-formes différentielles $\alpha \in \Omega^p(M^m)$

$$d\alpha = 0$$

définit naturellement une relation différentielle $\mathcal{R} \subset X^{(1)}$.

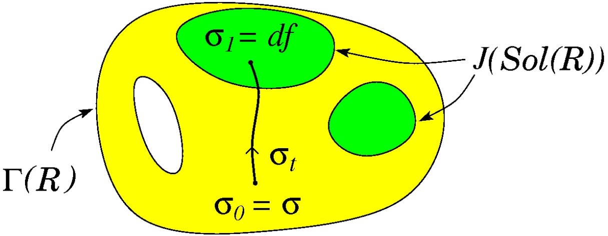
Notation.– Soit $X \longrightarrow M^m$ un fibré, on note $\Gamma^r(X)$ l'espace des section C^r de X. Si $f \in \Gamma^1(X)$, on note $J : \Gamma^1(X) \longrightarrow \Gamma^0(X^{(1)})$ l'application qui à $f \in \Gamma^1(X)$ associe son 1-jet $j^1 f$.

Définition.– Tout élément $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$ est appelé *solution formelle* de $\mathcal{R}$. On dit qu'une solution formelle σ est *holonome* s'il existe $f \in \Gamma^1(X)$ telle que $\sigma = j^1 f$. Une telle section f est dite *solution de la relation différentielle* $\mathcal{R}$. On note $\mathcal{S}ol(\mathcal{R})$ l'espace des solutions de $\mathcal{R}$.

Relations différentielles, *h*-principe

Les espaces $\mathcal{S}ol(\mathcal{R})$ et $\Gamma(\mathcal{R})$ sont munis de la topologie des compacts-ouverts, autrement dit, de la topologie de la convergence uniforme des sections et de leurs dérivées sur les compacts de M^m.

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R}$ satisfait au *h-principe* si pour toute section $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$, il existe une homotopie de sections $\sigma_t \in \Gamma(\mathcal{R})$ telle que $\sigma_0 = \sigma$ et $\sigma_1 \in J(\mathcal{S}ol(\mathcal{R}))$ (i. e. il existe $f : M \to N$ telle que $j^1 f = \sigma_1 \in \Gamma(\mathcal{R})$).

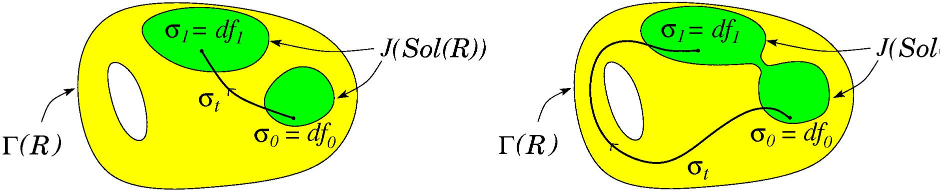


Cette définition équivaut à demander que l'application J induise une surjection au niveau du π_0 : $\pi_0(J) : \pi_0(\mathcal{S}ol(\mathcal{R})) \twoheadrightarrow \pi_0(\Gamma(\mathcal{R}))$.

Relations différentielles, *h*-principe

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R}$ satisfait au *h-principe 1-paramétrique* si $\mathcal{R}$ satisfait au *h*-principe et si pour toute famille de sections $\sigma_t \in \Gamma(\mathcal{R})$ telle que $\sigma_0 = j^1 f_0$ et $\sigma_1 = j^1 f_1$, il existe une homotopie $H : [0,1]^2 \to \Gamma(\mathcal{R})$ telle que :

$$H(0,t) = \sigma_t,\ H(s,0) = \sigma_0,\ H(s,1) = \sigma_1,\ \text{et } H(1,t) = j^1 f_t.$$



Deux exemples où $\mathcal{R}$ ne satisfait pas au h-principe 1-paramétrique.

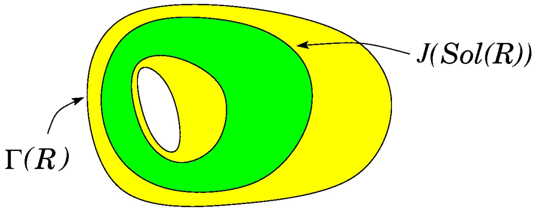
Relations différentielles, *h*-principe

Définition.– Une application $f : (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ entre deux espaces topologiques est une *équivalence d'homotopie faible* si elle induit un isomorphisme au niveau de tous les groupes d'homotopie i. e.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \pi_k(f) : \pi_k(X, x) \simeq \pi_k(Y, y).$$

Si $k = 0$, il faut comprendre que f induit une bijection entre les π_0.

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R}$ satisfait au *h-principe paramétrique* si $J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \to \Gamma(\mathcal{R})$ est une équivalence d'homotopie faible.



La relation $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe paramétrique.

Exemples de *h*-principe - Le théorème de Hirsch

Théorème.– *La relation différentielle des immersions du cercle dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, satisfait au h-principe paramétrique.*

Le théorème de Smale suggère que la relation différentielle des immersions de la sphère $\mathbb{S}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ satisfait au *h*-principe 1-paramétrique. Cette intuition est confirmée et généralisée par le théorème suivant.

Théorème de Hirsch, 1959 (avec le point de vue Gromov, 1971). – *Soient M^m et N^n deux variétés. On suppose que $m < n$ ou, si $m = n$, que M est ouverte. Alors, la relation différentielle des immersions $\mathcal{I}$ satisfait au h-principe paramétrique.*

Exemples de *h*-principe - Le théorème de Hirsch

Rappel.– Une variété est dite *fermée* si elle est compacte sans bord, elle est dite *ouverte* si aucune de ses composantes connexes n'est fermée. Une variété connexe dont le bord est non vide est ouverte.

Le théorème de Hirsch implique le théorème de Smale :

Théorème de Smale, 1957 (rappel).– *L'espace $I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$ est connexe par arcs.*

Exemples de *h*-principe - Le théorème de Hirsch

En effet, puisque $\mathcal{I}$ satisfait au *h*-principe,

$$J : I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{I}) = Mono(T\mathbb{S}^2, T\mathbb{R}^3)$$

induit une bijection au niveau du π_0. On montre ensuite que

$$\pi_0 Mono(T\mathbb{S}^2, T\mathbb{R}^3) \approx \pi_2 Gl_+(3, \mathbb{R})$$

au moyen d'un calcul homotopique qui est techniquement un peu délicat car l'espace tangent $T\mathbb{S}^2$ n'est pas trivial. On ne le fera donc pas ici. Le groupe $Gl_+(3, \mathbb{R})$ se rétracte sur $SO(3)$ (Gram-Schmidt) donc $\pi_2 Gl_+(3, \mathbb{R}) = \pi_2 SO(3)$. Puisque $\mathbb{S}^3$ est le revêtement universel de $SO(3)$ on en déduit $\pi_2 SO(3) = \{0\}$. Ainsi, l'espace $I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)$ ne possède qu'une composante connexe et deux immersions quelconques sont donc toujours régulièrement homotopes. $\square$

Exemples de *h*-principe - Le théorème de Nash-Kuiper

Une application $f : (M^m, g) \xrightarrow{C^1} \mathbb{E}^q = (\mathbb{R}^q, \langle ., . \rangle)$ est dite *isométrique* si

$$f^* \langle ., . \rangle = g.$$

Pour une telle application

$$Long(f \circ \gamma) = Long(\gamma)$$

pour tout $\gamma : I \xrightarrow{C^1} M^m$. On note $\mathcal{I}_{iso}$ la relation différentielle des immersions isométriques de M^m dans $\mathbb{E}^q$:

$$\mathcal{I}_{iso} = \{(x, y, L_{x,y}) \in J^1(M^m, \mathbb{E}^q) \mid L_{x,y} \in Mono_{iso}((T_x M, g_x); \mathbb{E}^q)\}.$$

Exemples de *h*-principe - Le théorème de Nash-Kuiper

Théorème (Nash-Kuiper 54-55, Gromov 86). – *Soient* (M^m, g) *une variété riemannienne quelconque et* $\mathbb{E}^q = (\mathbb{R}^q, \langle ., . \rangle)$ *un espace euclidien tel que* $q > m$. *Alors, la relation différentielle des immersions isométriques* $\mathcal{I}_{iso}$ *de* M^m *dans* $\mathbb{E}^q$ *satisfait au h-principe paramétrique.*

De plus, si $f_0 : (M^n, g) \longrightarrow \mathbb{E}^q$ *est un plongement strictement court (i. e.* $f^*\langle ., . \rangle < g$*) alors pour tout* $\epsilon : M^m \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$ *il existe un plongement* C^1 *isométrique* $f : (M^n, g) \longrightarrow \mathbb{E}^q$ *tel que*

$$\forall x \in M^m, \quad \|f(x) - f_0(x)\| \leq \epsilon(x).$$

Cette dernière propriété s'appelle la C^0*-densité*. Notons au passage que toute immersion est régulièrement homotope à une immersion courte.

Exemples de *h*-principe - Le théorème de Nash-Kuiper

Corollaire 1.– *Soit* Λ *un réseau de* $\mathbb{E}^2$. *Il existe un plongement isométrique* C^1 *du tore plat* $\mathbb{E}^2/\Lambda$ *dans* $\mathbb{E}^3$.

Rappelons qu'un *réseau* Λ de $\mathbb{R}^n$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}^n$ pour l'addition, tel que le sous-espace vectoriel engendré par Λ soit égal à $\mathbb{R}^n$. Il existe alors une famille de vecteurs $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 + ... + \mathbb{Z}e_n$. On appelle *tore plat* tout quotient $\mathbb{E}^2/\Lambda$ où Λ est un réseau de $\mathbb{R}^2$.

Exemples de *h*-principe - Le théorème de Nash-Kuiper

Démonstration du corollaire 1.– Notons $\mathbb{T}^2 = \mathbb{E}^2/\Lambda$. Puisque $\mathcal{I}_{iso}$ satisfait au *h*-principe paramétrique, l'inclusion

$$J : I_{iso}(\mathbb{T}^2, \mathbb{E}^3) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{I}_{iso}) = Mono_{iso}(T\mathbb{T}^2, T\mathbb{E}^3)$$

induit une bijection au niveau du π_0. Il suffit donc de montrer que $\Gamma(\mathcal{I}_{iso})$ n'est pas vide. Le tore $\mathbb{T}^2$ est évidemment parallélisable et donc

$$\mathcal{I}_{iso} = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^3 \times Mono_{iso}(\mathbb{E}^2, \mathbb{E}^3) = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^3 \times V_{2,3}^{o.n.}$$

où $V_{2,3}^{o.n.} \approx SO(3)$ est la variété de Stiefel des 2-repères orthonormés $\mathbb{E}^3$. En effet, si (v_1, v_2) est une base orthonormée globale de $T\mathbb{T}^2$ alors la flèche

$$\begin{array}{ccc} Mono_{iso}(\mathbb{E}^2, \mathbb{E}^3) & \longrightarrow & V_{2,3}^{o.n.} \\ L & \longmapsto & (L(v_1), L(v_2)) \end{array}$$

permet d'identifier les deux espaces. En particulier

$$\Gamma(\mathcal{I}_{iso}) = C^0(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}^3 \times SO(3))$$

est évidemment non vide. $\square$

Exemples de *h*-principe - Le théorème de Nash-Kuiper

Corollaire 2.– *On peut retourner la sphère* $\mathbb{S}^2$ *parmi les immersions isométriques* C^1.

Exemples de *h*-principe - Le théorème de Nash-Kuiper

Corollaire 2.– *On peut retourner la sphère* $\mathbb{S}^2$ *parmi les immersions isométriques* C^1.

Démonstration du corollaire 2.– Puisque $\mathcal{I}_{iso}$ satisfait au *h*-principe paramétrique, l'inclusion

$$J : I_{iso}(\mathbb{S}^2, \mathbb{E}^3) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{I}_{iso}) = Mono_{iso}(T\mathbb{S}^2, T\mathbb{E}^3)$$

induit une bijection au niveau du π_0. Un calcul homotopique analogue à celui des immersions de la sphère montre que

$$\pi_0 Mono_{iso}(T\mathbb{S}^2, T\mathbb{E}^3) \approx \pi_2 SO(3) = \{0\}.$$

Ainsi l'espace $I_{iso}(\mathbb{S}^2, \mathbb{E}^3)$ ne possède qu'une composante connexe et deux immersions isométriques quelconques sont donc toujours régulièrement homotopes parmi les immersions isométriques. $\square$

Exemples de *h*-principe - Le théorème de Nash-Kuiper

Corollaire 3.– *Il existe un plongement C^1-isométrique de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ dans une boule de rayon arbitrairement petit.*

Exemples de *h*-principe - Le théorème de Nash-Kuiper

Corollaire 3.– *Il existe un plongement C^1-isométrique de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ dans une boule de rayon arbitrairement petit.*

Démonstration du corollaire 3.– Il s'agit d'une application du résultat de C^0-densité du théorème de Nash-Kuiper. Soit $0 < r < 1$ le rayon de la boule à l'arrivée, l'application

$$\begin{array}{rccc} f_0 : & \mathbb{S}^2(1) & \longrightarrow & B^3(r) \\ & p & \longmapsto & \dfrac{r}{3}p \end{array}$$

est un plongement court. Donc, il existe un plongement C^1 isométrique $f : \mathbb{S}^2(1) \longrightarrow \mathbb{E}^3$ tel que $\|f - f_0\| \leq \frac{r}{3}$ ce qui implique que $f(\mathbb{S}^2(1)) \subset B^3(r)$. $\square$

Exemples de *h*-principe - Existence d'une forme symplectique

Définition.– Une 2-forme $\beta \in \Omega^2(M^{2n})$ est dite *non dégénérée* si, en tout point $x \in M^{2n}$, on a $\beta_x^n \neq 0$. Elle est dite *symplectique* si de plus $d\beta = 0$.

Soient $E = T^*M$ et $\mathcal{R}_0$ la relation différentielle définie sur l'espace des 1-jets du fibré E :

$$\mathcal{R}_0 = \{\kappa \in E^{(1)} \mid (d\kappa)^n \neq 0\}.$$

Ainsi, toute solution $\alpha \in \Omega^1(M) = \Gamma(T^*M)$ de $\mathcal{R}_0$ fournit une 2-forme $\omega = d\alpha$ qui est non dégénérée et qui vérifie $d\omega = 0$ par construction, c'est donc une forme symplectique.

Exemples de *h*-principe - Existence d'une forme symplectique

Théorème (Gromov 1969).– *Si M^{2n} est une variété ouverte, alors la relation différentielle $\mathcal{R}_0 \subset E^{(1)}$ satisfait au h-principe paramétrique.*

Corollaire. – *Soit M^{2n} une variété ouverte. Alors, elle admet une forme symplectique si et seulement si elle admet une 2-forme non dégénérée.*

Exemples de *h*-principe - Existence d'une forme symplectique

Démonstration du corollaire. Ici, il serait naturel de choisir

$$X = \{(x, \beta) \in \Lambda^2 T^* M \mid \beta \in \Lambda^2 T_x^* M \;\; \beta^n \neq 0\}$$

le fibré des formes bilinéaires antisymétriques non dégénérées, et

$$\mathcal{R} = \{\kappa \in X^{(1)} \mid d\kappa = 0\}.$$

Pourtant le *h*-principe porte sur la relation

$$\mathcal{R}_0 = \{\kappa \in E^{(1)} \mid (d\kappa)^n \neq 0\}...$$

Exemples de *h*-principe - Existence d'une forme symplectique

Le lien entre $E^{(1)}$ et $\Lambda^2 T^*M$ est le suivant. Si $\alpha := \sum_{k=1}^m a_i dx_i$ est une 1-forme, ici écrite en coordonnées, alors son 1-jet en un point $x \in M^{2n}$ s'identifie à la donnée du point x et de $m^2 + m$ nombres :

$$j^1\alpha(x) = (x, a_1, ..., a_m, a_{11}, ..., a_{mm})$$

où $a_{ij} = \frac{\partial a_i}{\partial a_j}$ et $m = 2n$. La différentielle extérieure de α est une application linéaire sur ces nombres :

$$d\alpha_x = \sum_{i<j} (a_{ij} - a_{ji}) dx_i \wedge dx_j.$$

Exemples de *h*-principe - Existence d'une forme symplectique

Par conséquent, la différentielle extérieure induit une application

$$d: \begin{array}{ccc} E^{(1)} & \longrightarrow & \Lambda^2 T^*M \\ \kappa & \longmapsto & d\kappa \end{array}$$

et qui s'écrit en coordonnées

$$\kappa = (x, \kappa_1, ..., \kappa_m, \kappa_{11}, ..., \kappa_{mm}) \longrightarrow d\kappa = (x, \sum_{i<j} (\kappa_{ij} - \kappa_{ji}) dx_i \wedge dx_j).$$

Cette application est surjective, c'est en fait une fibration (affine) avec

$$d^{-1}(x, \sum_{i<j} b_{ij} dx_i \wedge dx_j) = \{(x, \kappa_i, \kappa_{ij}) \mid \kappa_{ij} - \kappa_{ji} = b_{ij}\}.$$

En particulier, les espaces $E^{(1)}$ et $\Lambda^2 T^*M$ sont homotopiquement équivalents.

Exemples de *h*-principe - Existence d'une forme symplectique

Notons que $\mathcal{R}_0 = d^{-1}(X)$ et que $d : \mathcal{R}_0 \longrightarrow X$ est la restriction au dessus de X de la fibration $d : E^{(1)} \longrightarrow \Lambda^2 T^* M$.

Ainsi $\mathcal{R}_0$ et X sont homotopiquement équivalents et il en est de même de $\Gamma(\mathcal{R}_0)$ et $\Gamma(X)$.

Or $\Gamma(X)$ est non vide si et seulement si M^{2n} admet une 2-forme non dégénérée. Puisque $\mathcal{R}_0$ satisfait au *h*-principe, $\mathcal{S}ol(\mathcal{R}_0)$ est non vide si et seulement si M^{2n} admet une 2-forme non dégénérée. $\square$

Exemples de *h*-principe - Existence d'une forme symplectique

Observations.– 1) Il existe des versions plus élaborées où l'on impose la classe de cohomologie de la forme symplectique.

2) Il existe aussi des versions en géométrie de contact.

Exemples de *h*-principe -Théorème de Lohkamp

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et M^n est une variété compacte C^∞. On note $\mathcal{M}(M^n)$ l'espace des métriques sur M^n, puis $Ricci^{<\alpha}(M^n)$ (resp. $Scal^{<\alpha}(M^n)$) le sous-espace des métriques dont la courbure de Ricci $Ricci(g)$ (resp. la courbure scalaire $Scal(g)$) est en tout point plus strictement petite que α.

Exemples de *h*-principe -Théorème de Lohkamp

Théorème de Lohkamp (1995).– *Soient* $\alpha \in \mathbb{R}$, (M^n, g_0) *une variété riemannienne compacte de dimension* $n \geq 3$, *alors* g_0 *est homotope à une métrique* g *telle que* $Ricci(g) < \alpha$. *En fait, les relations différentielles*

$$Ricci(g) < \alpha \quad \textit{et} \quad Scal(g) < \alpha$$

sur l'espace des 2-jets des métriques satisfont au h-principe paramétrique. De plus, $Ricci^{<\alpha}(M^n)$ *et* $Scal^{<\alpha}(M^n)$ *sont* C^0*-denses dans* $\mathcal{M}(M^n)$.

• En particulier, si $n \geq 3$, la contrainte $Ricci(g) < 0$ n'impose *rien* sur la topologie de la variété...

• La dernière phrase du théorème signifie que toute métrique sur M^n compacte, $n \geq 3$, peut être approchée C^0 (mais pas C^1) par des métriques à courbure de Ricci négative ; par exemple la métrique usuelle de $\mathbb{S}^n$...