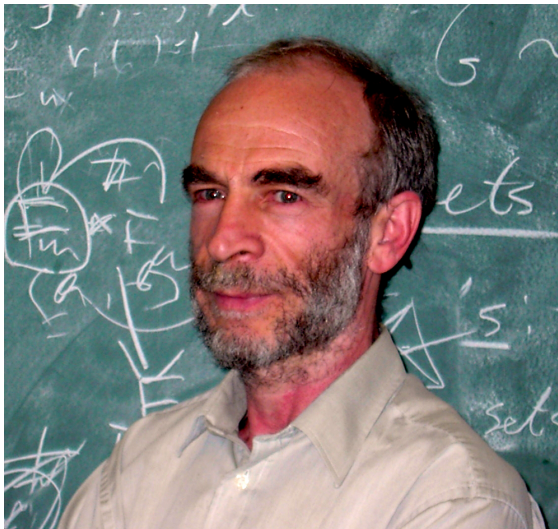


CM4 : Deux théorèmes de Gromov



Mikhaïl Gromov

Le h -principe pour les relations $Diff(M)$ -invariantes

Définition.— Soit $X \rightarrow M$ un fibré. On suppose que le groupe $Diff(M)$ agit de façon naturelle sur $X^{(1)}$. On dira qu'une relation différentielle $\mathcal{R} \subset X^{(1)}$ est $Diff(M)$ -invariante si pour tout $\varphi \in Diff(M)$, $\varphi_*(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

Action de $Diff(M)$ sur $J^1(M, N)$. — Soit $\varphi \in Diff(M)$, alors φ agit sur $J^1(M, N)$ par :

$$\varphi_*(x, y, L) = (\varphi(x), y, L \circ d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}).$$

Si f est telle que $j^1 f(x) = (x, y, L)$ alors :

$$\varphi_*(j^1 f(x)) = (\varphi(x), f(x), df_x \circ d\varphi_{\varphi(x)}^{-1}) = j^1(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)).$$

Le h -principe pour les relations $Diff(M)$ -invariantes

Action de $Diff(M)$ sur $X^{(1)}$ où $X = T^*M$. – L'action de $\varphi \in Diff(M)$ sur $X^{(1)}$ est induite par la formule

$$\varphi^*(j^1\alpha(x)) := j^1(\varphi^*\alpha)(\varphi^{-1}(x))$$

où $\alpha \in \Omega^1(M) = \Gamma(T^*M)$. Cette action est moins aisée à décrire en coordonnées que la précédente car le jet d'ordre 2 de φ intervient. Par exemple, si $M = \mathbb{R}$ et si $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R})$ alors il existe $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\alpha_x = a(x)dx$ et le 1-jet $j^1\alpha(x)$ s'identifie au triplet $(x, a(x), a'(x))$. On a alors $(\varphi^*\alpha)_x = \varphi'(x).a \circ \varphi(x)dx$ et

$$(j^1\varphi^*\alpha)(x) = (x, \varphi'.a \circ \varphi(x), \varphi''(x).a \circ \varphi(x) + \varphi'^2(x).a' \circ \varphi(x)),$$

d'où l'action de φ sur $X^{(1)} \approx \{(x, a, A) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$:

$$\varphi^*(x, a, A) = (\varphi^{-1}(x), \varphi' \circ \varphi^{-1}(x).a, \varphi'' \circ \varphi^{-1}(x).a + \varphi'^2 \circ \varphi^{-1}(x).A).$$

Le h -principe pour les relations $Diff(M)$ -invariantes

Exemples.– La relation \mathcal{I} des immersions est $Diff(M)$ -invariante mais pas \mathcal{I}_{iso} . La relation \mathcal{R}_0 des 1-formes dont la différentielle est non dégénérée est $Diff(M)$ -invariante.

Théorème 1 : h -principe pour les relations $Diff(M)$ -invariantes (Gromov 69). – Soit M une variété ouverte et \mathcal{R} une relation différentielle ouverte et $Diff(M)$ -invariante, alors \mathcal{R} satisfait au h -principe paramétrique i.e.

$$J : Sol(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

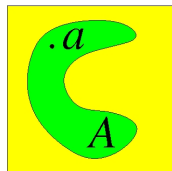
est une équivalence d'homotopie faible.

Observation.– Ce théorème implique le théorème de classification des immersions de Smale et Hirsch dans le cas équidimensionnel ainsi que le théorème d'existence de structures symplectiques sur les variétés ouvertes.

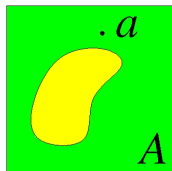
Le h -principe pour les relations amples

Amplitude d'une partie de \mathbb{R}^n . – Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on note $IntConv(A, \alpha)$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de la composante connexe de A qui contient α .

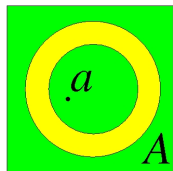
Définition. – Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est *ample* si pour tout $\alpha \in A$ on a : $IntConv(A, \alpha) = \mathbb{R}^n$. En particulier $A = \emptyset$ est ample.



A est non ample



A est ample



A est non ample.

Exemple.– Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n . Son complémentaire ${}^c F$ est ample si et seulement si $\text{Codim } F \geq 2$.

Le h -principe pour les relations amples

Amplitude d'une relation $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$. – Localement $J^1(M, N)$ s'identifie à :

$$J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \prod_{i=1}^m \mathbb{R}^n,$$

où \mathcal{U} et \mathcal{V} sont des cartes de M et N . On note (x, y, v_1, \dots, v_m) un élément de $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ et on pose :

$$J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp = \{(x, y, v_1, \dots, v_{m-1})\},$$

ainsi $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp \times \mathbb{R}^n$. On note p^\perp la projection sur le premier facteur et $\mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} \subset J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ l'image de $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ par l'identification locale.

Le h -principe pour les relations amples

Schématiquement, on a :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} & \longrightarrow & \mathcal{J}^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \\ & & \downarrow p^\perp \\ & & \mathcal{J}^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp. \end{array}$$

Enfin, si $z \in \mathcal{J}^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp$, on pose : $\mathcal{R}_z = (p^\perp)^{-1}(z) \cap \mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$.

Définition. – Une relation différentielle $\mathcal{R} \subset \mathcal{J}^1(M, N)$ est *ample* si pour toute identification locale $\mathcal{J}^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, et pour tout $z \in \mathcal{J}^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp$, \mathcal{R}_z est ample dans $(p^\perp)^{-1}(z) \simeq \mathbb{R}^n$.

Remarque. – Évidemment, cette définition ne dépend pas de la carte choisie puisqu'on les prend toutes...

Le h -principe pour les relations amples

Proposition. – *La relation différentielle \mathcal{I} des immersions de M^m dans N^n est ample si $n > m$.*

Le h -principe pour les relations amples

Proposition. – La relation différentielle \mathcal{I} des immersions de M^m dans N^n est ample si $n > m$.

Démonstration. – Soit $J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = \mathcal{U} \times \mathcal{V} \times \prod_{i=1}^m \mathbb{R}^n$ une représentation locale. Alors

$$(x, y, v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} \iff (v_1, \dots, v_m) \text{ est libre dans } \mathbb{R}^n.$$

Soit $z = (x, y, v_1, \dots, v_{m-1}) \in J^1(\mathcal{U}, \mathcal{V})^\perp$.

1) Si (v_1, \dots, v_{m-1}) sont linéairement indépendants alors :

$$\begin{aligned} v_m \in (p^\perp)^{-1}(z) \text{ est dans } \mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} &\iff v_m \notin \text{Vect}(v_1, \dots, v_{m-1}) =: \Pi \\ &\iff v_m \in \mathbb{R}^n \setminus \Pi. \end{aligned}$$

Ainsi : $\mathcal{R}_z = \mathcal{R}_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} \cap (p^\perp)^{-1}(z) = \mathbb{R}^n \setminus \Pi$. Or la codimension de Π est $n - (m - 1) \geq 2$, donc \mathcal{R}_z est ample.

2) Si (v_1, \dots, v_{m-1}) sont liés alors $\mathcal{R}_z = \emptyset$ et donc \mathcal{R}_z est ample. \square

Le h -principe pour les relations amples

Théorème 2 : h -principe pour les relations amples (Gromov 69). –
Si \mathcal{R} est ouverte et ample, alors \mathcal{R} satisfait au h -principe paramétrique i.e.

$$J : \text{Sol}(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Remarque. – Ici, pas d'hypothèse sur la variété M .

Observation.– Ce théorème implique le théorème de classification des immersions de Smale et Hirsch dans le cas de la codimension strictement positive.