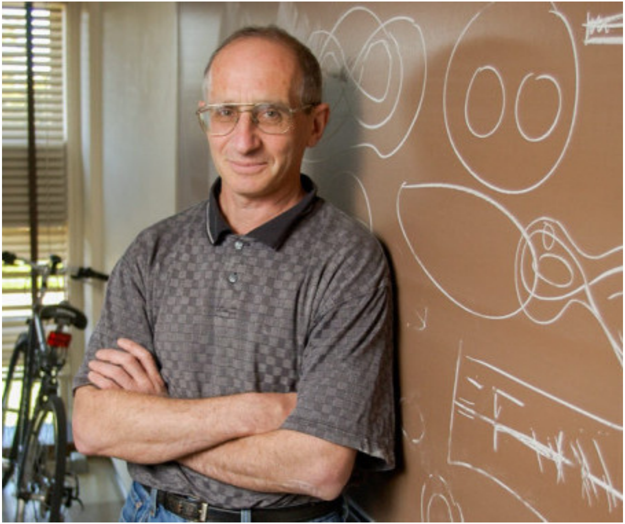
CM6 : Relations amples



Yakov Eliashberg

h-principe pour les relations amples

Théorème (Gromov 69-73). – *Si $\mathcal{R}$ est ouverte et ample, alors $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe paramétrique i.e.*

$$J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie faible.

h-principe pour les relations amples

Théorème (Gromov 69-73). – *Si $\mathcal{R}$ est ouverte et ample, alors $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe paramétrique i.e.*

$$J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Une conséquence immédiate.– La relation différentielle des immersions de M^m dans N^n avec $n > m$ satisfait au h-principe paramétrique (théorème de Hirsch).

h-principe pour les relations amples

Théorème (Gromov 69-73). – *Si $\mathcal{R}$ est ouverte et ample, alors $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe paramétrique i.e.*

$$J : \mathcal{S}ol(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Une conséquence immédiate.– La relation différentielle des immersions de M^m dans N^n avec $n > m$ satisfait au h-principe paramétrique (théorème de Hirsch).

Retournement de la sphère (Smale).– Un calcul homotopique montre que si $M^m = \mathbb{S}^2$ et $N^n = \mathbb{R}^3$ alors

$$\pi_0(I(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}^3)) = \pi_2(Gl_+(3, \mathbb{R})) = 0.$$

Esquisse de démonstration

• On travaille d'abord localement sur un cube $C = [0,1]^m$ de M et un ouvert $\mathcal{V} \approx \mathbb{R}^n$ de N.

Esquisse de démonstration

• On travaille d'abord localement sur un cube $C = [0,1]^m$ de M et un ouvert $\mathcal{V} \approx \mathbb{R}^n$ de N.

• Une section $\sigma \in \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n} \subset J^1(C, \mathbb{R}^n)$ s'écrit :

$$\sigma : c \longmapsto (c, f_0(c), v_1(c), ..., v_m(c)) \in \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}.$$

Esquisse de démonstration

• On travaille d'abord localement sur un cube $C = [0,1]^m$ de M et un ouvert $\mathcal{V} \approx \mathbb{R}^n$ de N.

• Une section $\sigma \in \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n} \subset J^1(C,\mathbb{R}^n)$ s'écrit :

$$\sigma : c \longmapsto (c, f_0(c), v_1(c), \ldots, v_m(c)) \in \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}.$$

• Notons $\pi^{\perp m}$ la projection

$$(c, y, v_1, \ldots, v_m) \longmapsto (c, y, v_1, \ldots, v_{m-1})$$

puis $\mathcal{R}_z^{\perp m} = \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n} \cap (p^{\perp m})^{-1}(z)$ pour tout

$$z = (b, y, v_1, \ldots, v_{m-1}) \in J^1(C,\mathbb{R}^n)^{\perp m}$$

.

Esquisse de démonstration

- On pose

$$\begin{array}{rccc} \sigma^{\perp_m}: & C & \longrightarrow & J^1(C,\mathbb{R}^n)^{\perp_m} \\ & c & \longmapsto & (c, f_0(c), v_1(c), ..., v_{m-1}(c)) \end{array}$$

Esquisse de démonstration

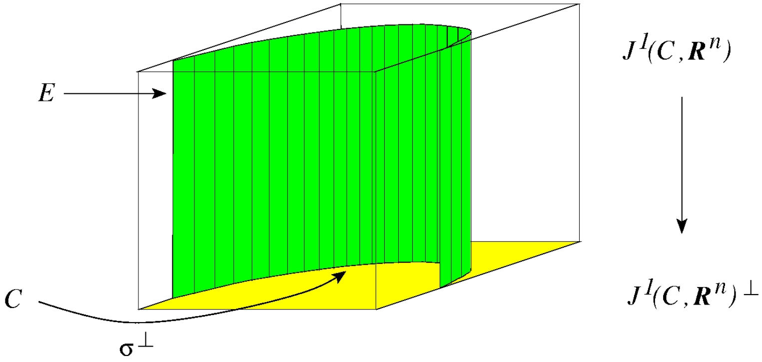
- On pose

$$\begin{array}{rccc} \sigma^{\perp_m}: & C & \longrightarrow & J^1(C,\mathbb{R}^n)^{\perp_m} \\ & c & \longmapsto & (c, f_0(c), v_1(c), ..., v_{m-1}(c)) \end{array}$$

- Soit E le tiré en arrière du fibré $(p^{\perp_m}, J^1(C,\mathbb{R}^n), J^1(C,\mathbb{R}^n)^{\perp_m})$:

$$\begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & J^1(C,\mathbb{R}^n) \\ \pi \downarrow & & \downarrow p^{\perp_m} \\ C & \stackrel{\sigma^{\perp_m}}{\longrightarrow} & J^1(C,\mathbb{R}^n)^{\perp_m} \end{array}$$

Esquisse de démonstration



Esquisse de démonstration

• Soit $\mathcal{S}^m \subset E$ le tiré en arrière de $\mathcal{R}^{\perp_m}$. La relation $\mathcal{S}^m$ est évidemment ouverte et ample.

Esquisse de démonstration

• Soit $\mathcal{S}^m \subset E$ le tiré en arrière de $\mathcal{R}^{\perp_m}$. La relation $\mathcal{S}^m$ est évidemment ouverte et ample.

• D'autre part $v_m : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fournit une section de $\mathcal{S}^m$ au dessus de B.

Esquisse de démonstration

• Soit $\mathcal{S}^m \subset E$ le tiré en arrière de $\mathcal{R}^{\perp_m}$. La relation $\mathcal{S}^m$ est évidemment ouverte et ample.

• D'autre part $v_m : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fournit une section de $\mathcal{S}^m$ au dessus de B.

• On utilise maintenant le lemme fondamental à paramètre (et C^∞), l'espace des paramètres étant $C := [0,1]^m$ et la relation différentielle $\mathcal{S}^m$.

Esquisse de démonstration

- Il existe donc $h : C \times [0,1] \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{S}^m$ telle que :

$$h(.,0) = h(.,1) = v_m \in \Gamma^\infty(\mathcal{S}^m),$$

$$\forall c \in C,\ \ h(c,.) \in \Omega^{AR}_{v_m(c)}(\mathcal{S}^m_{v_m(c)})$$

et

$$\forall c \in C,\ \int_0^1 h(c,s)ds = \frac{\partial f_0}{\partial c_m}(c).$$

Esquisse de démonstration

- On pose

$$F_1(c) := f_0(c_1, ..., c_{m-1}, 0) + \int_0^{c_m} h(c_1, ..., c_{m-1}, s, N_1 s)ds.$$

Esquisse de démonstration

- On pose

$$F_1(c) := f_0(c_1, ..., c_{m-1}, 0) + \int_0^{c_m} h(c_1, ..., c_{m-1}, s, N_1 s) ds.$$

- On montre alors que

$$\|F_1 - f_0\| = O(\frac{1}{N_1})$$

et même, plus encore, que

$$\|F_1 - f_0\|_{C^1, \widehat{m}} = O(\frac{1}{N_1}).$$

Esquisse de démonstration

• On pose

$$F_1(c) := f_0(c_1, ..., c_{m-1}, 0) + \int_0^{c_m} h(c_1, ..., c_{m-1}, s, N_1 s) ds.$$

• On montre alors que

$$\|F_1 - f_0\| = O(\frac{1}{N_1})$$

et même, plus encore, que

$$\|F_1 - f_0\|_{C^1, \widehat{m}} = O(\frac{1}{N_1}).$$

• Cette dernière subtilité ne nous servira pas tout de suite, mais à la prochaine étape.

Esquisse de démonstration

- Par définition de $\mathcal{S}^m$, la section

$$c \mapsto (c, f_0(c), v_1(c), ..., v_{m-1}(c), \frac{\partial F_1}{\partial c_m}(c))$$

est dans la relation $\mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}$.

Esquisse de démonstration

• Par définition de $\mathcal{S}^m$, la section

$$c \mapsto (c, f_0(c), v_1(c), ..., v_{m-1}(c), \frac{\partial F_1}{\partial c_m}(c))$$

est dans la relation $\mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}$.

• Puisque que $\mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}$ est ouverte et que F_1 est C^0-proche de f_0, quitte à augmenter N_1, on peut supposer que

$$c \mapsto (c, F_1(c), v_1(c), ..., v_{m-1}(c), \frac{\partial F_1}{\partial c_m}(c))$$

est une section de $\mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}$.

Esquisse de démonstration

- On recommence par rapport à l'avant-dernière variable pour obtenir :

$$c \mapsto (c, F_1(c), v_1(c), ..., v_{m-2}(c), \frac{\partial F_2}{\partial c_{m-1}}(c), \frac{\partial F_1}{\partial c_m}(c)) \in \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}.$$

Esquisse de démonstration

• On recommence par rapport à l'avant-dernière variable pour obtenir :

$$c \mapsto (c, F_1(c), v_1(c), ..., v_{m-2}(c), \frac{\partial F_2}{\partial c_{m-1}}(c), \frac{\partial F_1}{\partial c_m}(c)) \in \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}.$$

• $\mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}$ est ouverte et F_2 et F_1 sont $(C^1, \widehat{c_{m-1}})$-proches, on peut donc toujours supposer que :

$$c \mapsto (c, F_2(c), v_1(c), ..., v_{m-2}(c), \frac{\partial F_2}{\partial c_{m-1}}(c), \frac{\partial F_2}{\partial c_m}(c)) \in \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}.$$

Esquisse de démonstration

• On recommence par rapport à l'avant-dernière variable pour obtenir :

$$c \mapsto (c, F_1(c), v_1(c), ..., v_{m-2}(c), \frac{\partial F_2}{\partial c_{m-1}}(c), \frac{\partial F_1}{\partial c_m}(c)) \in \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}.$$

• $\mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}$ est ouverte et F_2 et F_1 sont $(C^1, \widehat{c_{m-1}})$-proches, on peut donc toujours supposer que :

$$c \mapsto (c, F_2(c), v_1(c), ..., v_{m-2}(c), \frac{\partial F_2}{\partial c_{m-1}}(c), \frac{\partial F_2}{\partial c_m}(c)) \in \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}.$$

• Et ainsi de suite jusqu'à obtenir une section complètement intégrée, autrement dit une solution $F := F_m$ au dessus de C qui est C^0-proche de f_0 :

$$\|F - f_0\|_{C^0} = O(\frac{1}{N_1} + ... + \frac{1}{N_m}).$$

Esquisse de démonstration

• Pour obtenir une solution définie sur tout M^m, on recouvre la variété de cubes et on applique le procédé précédent récursivement sur chaque cube.

Esquisse de démonstration

• Pour obtenir une solution définie sur tout M^m, on recouvre la variété de cubes et on applique le procédé précédent récursivement sur chaque cube.

• Bien sûr, le problème qui se pose est celui du recollement des solutions à chaque étape. Précisément, si C est un ouvert cubique, K un compact de C et si f_0 est déjà solution sur un voisinage ouvert $Op(K)$ de K, il s'agit d'obtenir une solution f qui prolonge f_0 sur C.

Esquisse de démonstration

• Pour obtenir une solution définie sur tout M^m, on recouvre la variété de cubes et on applique le procédé précédent récursivement sur chaque cube.

• Bien sûr, le problème qui se pose est celui du recollement des solutions à chaque étape. Précisément, si C est un ouvert cubique, K un compact de C et si f_0 est déjà solution sur un voisinage ouvert $Op(K)$ de K, il s'agit d'obtenir une solution f qui prolonge f_0 sur C.

• Pour cela on va devoir modifier chacune des intégrations convexes, $F_1, ..., F_m$.

Esquisse de démonstration

- Soit $\lambda_1 : C \longrightarrow [0,1]$ une fonction C^∞ à support compact telle que

$$\lambda_1(c) = \begin{cases} 1 & \text{si } c \in Op_1(K) \subset Op(K) \\ 0 & \text{si } c \in C \setminus Op(K). \end{cases}$$

où $Op_1(K)$ est un voisinage ouvert de K plus petit que $Op(K)$.

Esquisse de démonstration

- Soit $\lambda_1 : C \longrightarrow [0,1]$ une fonction C^∞ à support compact telle que

$$\lambda_1(c) = \begin{cases} 1 & \text{si } c \in Op_1(K) \subset Op(K) \\ 0 & \text{si } c \in C \setminus Op(K). \end{cases}$$

où $Op_1(K)$ est un voisinage ouvert de K plus petit que $Op(K)$.

- Soit F_1 la solution précédente au dessus de C construite à partir de

$$\sigma : c \longmapsto (c, f_0(c), v_1(c), ..., v_m(c)) \in \mathcal{R}_{C,\mathbb{R}^n}.$$

On pose

$$f_1 := F_1 + \lambda_1(f_0 - F_1).$$

Esquisse de démonstration

- Soit $j \in \{1, ..., m\}$, on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial c_j} = \frac{\partial F_1}{\partial c_j} + \lambda_1 . \left(\frac{\partial f_0}{\partial c_j} - \frac{\partial F_1}{\partial c_j} \right) + \frac{\partial \lambda_1}{\partial c_j} .(f_0 - F_1).$$

Esquisse de démonstration

- Soit $j \in \{1, ..., m\}$, on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial c_j} = \frac{\partial F_1}{\partial c_j} + \lambda_1 . \left(\frac{\partial f_0}{\partial c_j} - \frac{\partial F_1}{\partial c_j} \right) + \frac{\partial \lambda_1}{\partial c_j} . (f_0 - F_1).$$

- Puisque λ_1 est à support compact, le terme

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial c_j}$$

est borné quel que soit $j \in \{1, ..., m\}$.

Esquisse de démonstration

- Soit $j \in \{1, ..., m\}$, on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial c_j} = \frac{\partial F_1}{\partial c_j} + \lambda_1 . \left(\frac{\partial f_0}{\partial c_j} - \frac{\partial F_1}{\partial c_j} \right) + \frac{\partial \lambda_1}{\partial c_j} . (f_0 - F_1).$$

- Puisque λ_1 est à support compact, le terme

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial c_j}$$

est borné quel que soit $j \in \{1, ..., m\}$.

- Puisque F_1 et f_0 sont $(C^1, \widehat{m})$-proches on en déduit que pour tout $j \in \{1, ..., m-1\}$, on a

$$\|f_1 - F_1\|_{C^1, \widehat{m}} = O(\frac{1}{N_1}).$$

Esquisse de démonstration

- En revanche le terme

$$\frac{\partial f_1}{\partial c_m} - \frac{\partial F_1}{\partial c_m}$$

n'a aucune raison d'être petit en général, et précisément, c'est lui qui importe si l'on veut que

$$c \longmapsto \left(c, \frac{\partial f_1}{\partial c_m}(c) \right)$$

soit une solution de $\mathcal{S}^m$.

Esquisse de démonstration

- La petitesse de

$$\left\| \frac{\partial f_1}{\partial c_m} - \frac{\partial F_1}{\partial c_m} \right\|_{C^0}$$

dépend de celle de

$$\left\| \frac{\partial f_0}{\partial c_m} - \frac{\partial F_1}{\partial c_m} \right\|_{C^0, Op(K)} .$$

Esquisse de démonstration

• La petitesse de

$$\left\| \frac{\partial f_1}{\partial c_m} - \frac{\partial F_1}{\partial c_m} \right\|_{C^0}$$

dépend de celle de

$$\left\| \frac{\partial f_0}{\partial c_m} - \frac{\partial F_1}{\partial c_m} \right\|_{C^0, Op(K)}.$$

• On montre alors que l'on peut toujours choisir la famille de chemins h globalement avec pour contrainte qu'au dessus de $Op(K)$ elle soit égal à la famille des chemins constants $\dfrac{\partial f_0}{\partial c_m}$ *i. e.*

$$\forall c \in Op(K),\ h(c,s) = \frac{\partial f_0}{\partial c_m}(c).$$

Esquisse de démonstration

- Puisque

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial c_m}(c) &= h(c_1, ..., c_{m-1}, c_m, N_1 c_m)\\ &= \frac{\partial f_0}{\partial c_m}(c)\end{aligned}$$

la différence $\dfrac{\partial f_0}{\partial c_m} - \dfrac{\partial F_1}{\partial c_m}$ est nulle au dessus de $Op(K)$ et donc

$$\left\| \frac{\partial f_1}{\partial c_m} - \frac{\partial F_1}{\partial c_m} \right\|_{C^0}$$

est petit. $\square$

Esquisse de démonstration

Théorème (Gromov). – *Soit* $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ *ouverte et ample, alors* $\mathcal{R}$ *satisfait au h-principe* C^0*-dense.*

Esquisse de démonstration

Théorème (Gromov). – *Soit $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ ouverte et ample, alors $\mathcal{R}$ satisfait au h-principe C^0-dense.*

• Cela signifie que si P est une variété compacte vue comme un espace de paramètres et $\sigma : P \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une homotopie

$$\sigma_u : [0,1] \times P \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

telle que $\sigma_0 = \sigma$ et

$$\begin{array}{rccl} \sigma_1 : & P & \longrightarrow & J(\mathcal{S}ol(\mathcal{R})) \subset \Gamma(\mathcal{R}) \\ & p & \longmapsto & j^1 f_p. \end{array}$$

Esquisse de démonstration

Théorème (Gromov). – *Soit* $\mathcal{R} \subset J^1(M, N)$ *ouverte et ample, alors* $\mathcal{R}$ *satisfait au h-principe* C^0*-dense.*

• Cela signifie que si P est une variété compacte vue comme un espace de paramètres et $\sigma : P \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe une homotopie

$$\sigma_u : [0, 1] \times P \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

telle que $\sigma_0 = \sigma$ et

$$\sigma_1 : \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & J(\mathcal{S}ol(\mathcal{R})) \subset \Gamma(\mathcal{R}) \\ p & \longmapsto & j^1 f_p. \end{array}$$

• De plus : $\max_{p \in P} \|g_p - f_p\|_{C^0} < \epsilon$, où $g_p = bs(\sigma) : P \longrightarrow C^\infty(M, N)$.