En cheminant avec Kakeya...

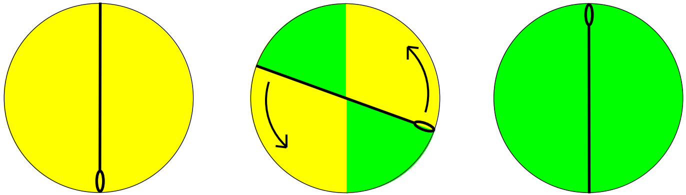
Vincent Borrelli

Université Ouverte-Université Lyon 1

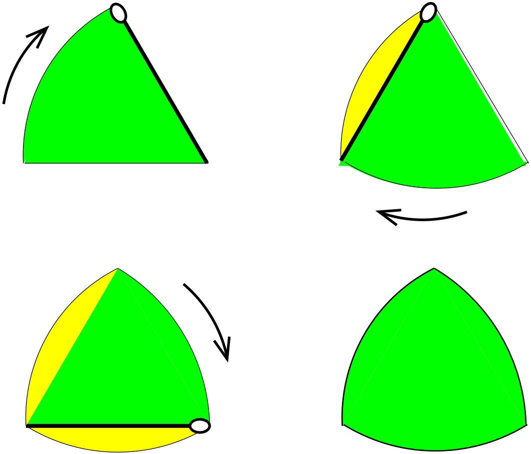
Cycle 18 : *Coups de théâtre en mathématiques*

Une question anodine ?

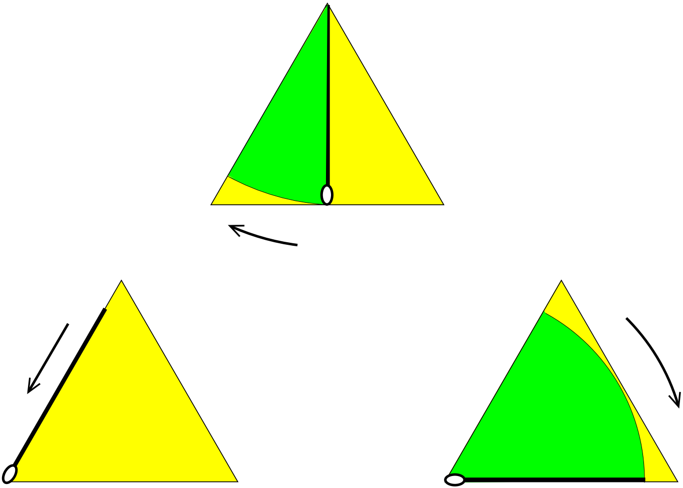
La question de Kakeya (1917).– *Quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de manière à la retourner complètement ?*



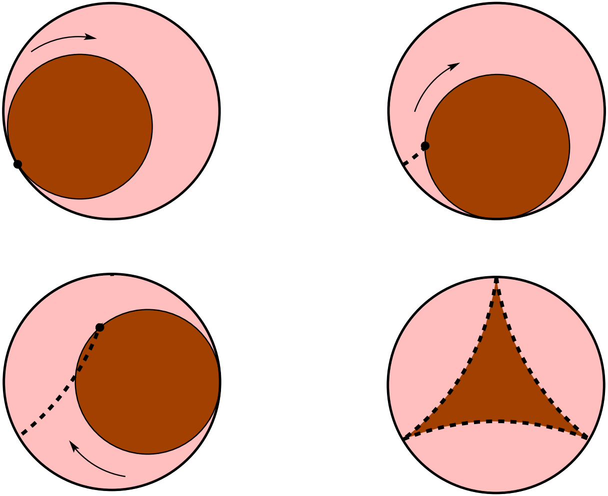
Le Reuleaux



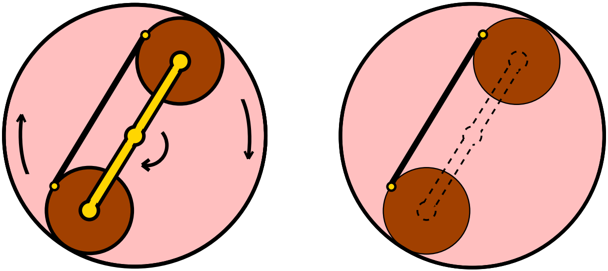
Le triangle équilatéral



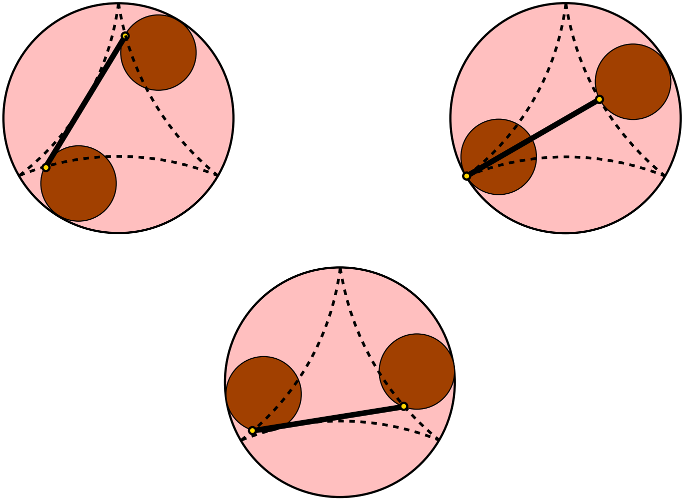
La deltoïde I



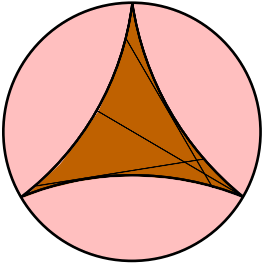
La deltoïde II

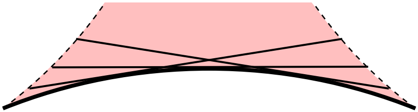


La deltoïde III

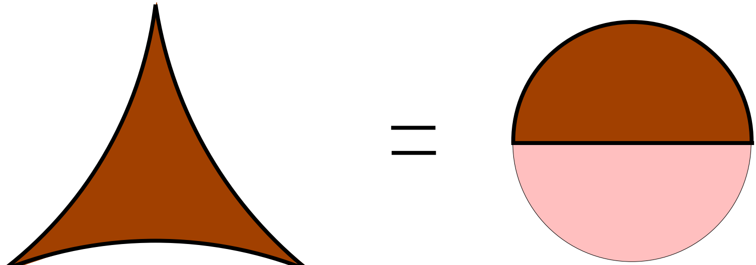


La deltoïde IV





La deltoïde V

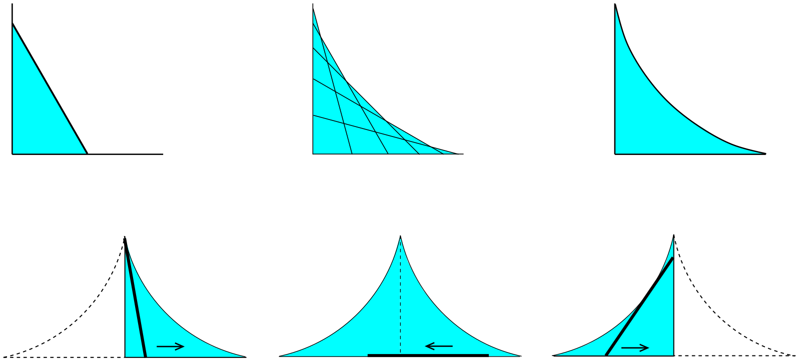


Une question célèbre

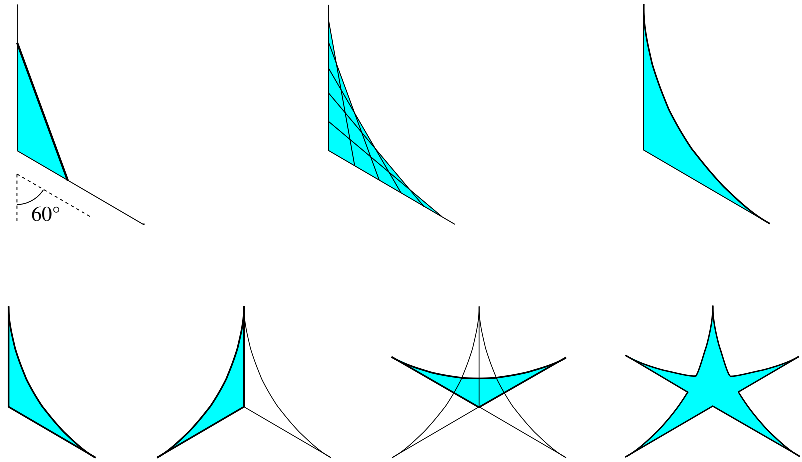
Problème. – Démontrer que la deltoïde est la plus petite surface permettant le retournement de l'aiguille.

En 1925, pour G. Birkhoff ce problème est la question non résolue des mathématiques la plus fascinante après le théorème des quatre couleurs...

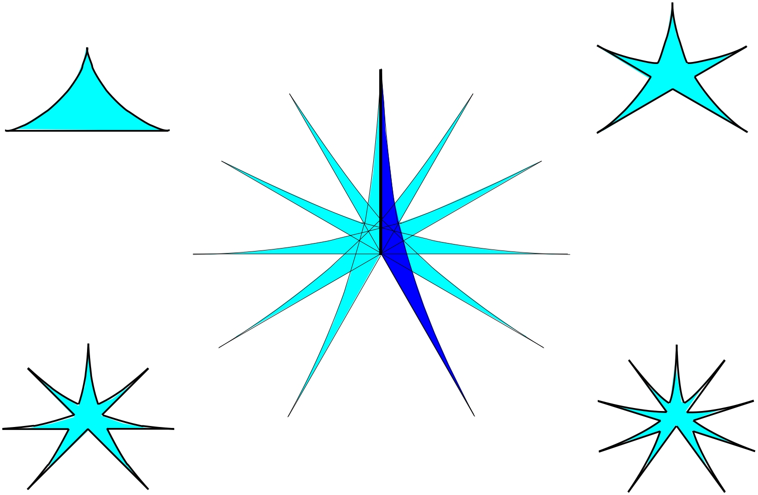
Contre-exemple I



Contre-exemple II



Contre-exemple III

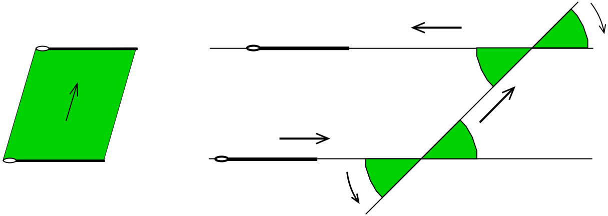


La solution de Besicovitch

Théorème de Besicovitch (1928). – *Il est possible de retourner une aiguille dans une aire aussi petite que l'on veut !*

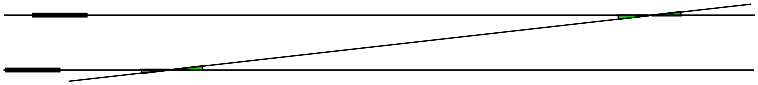
Le problème de Kakeya pour les aiguilles parallèles

Enoncé. – Etant données deux positions parallèles d'une même aiguille, on se demande comment passer de l'une à l'autre en couvrant le moins d'espace possible.

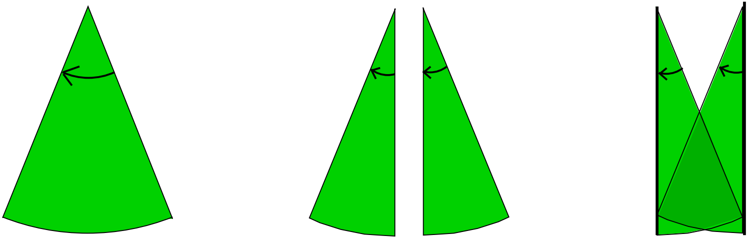


Sa solution

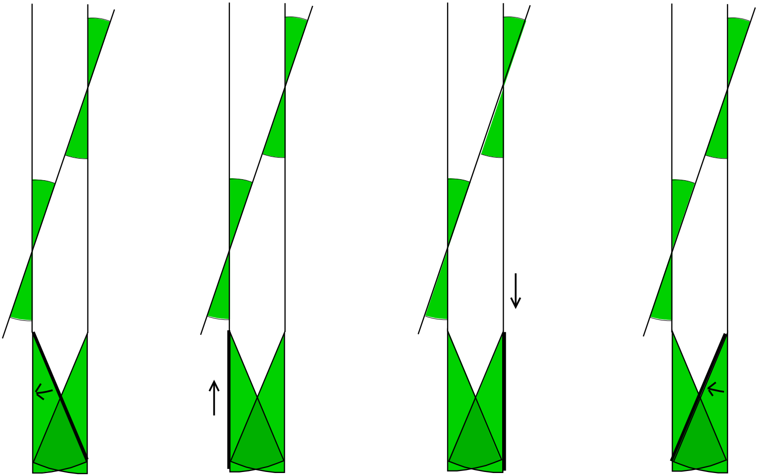
Réponse. – Il est possible de passer deux positions parallèles d'une même aiguille dans une aire aussi petite que l'on veut.



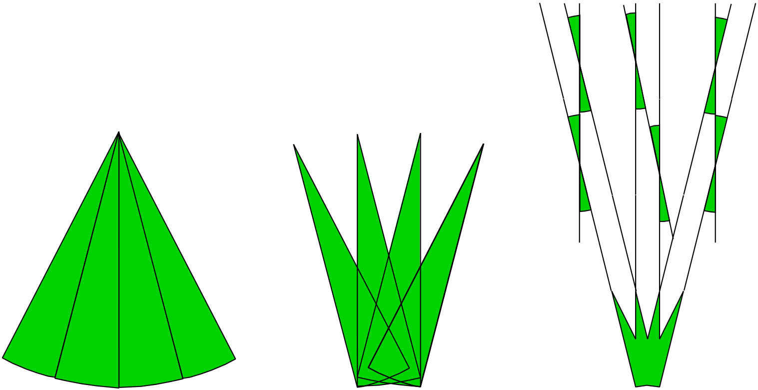
La construction de Besicovitch I



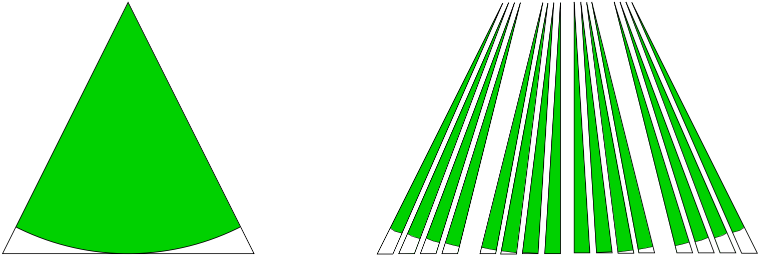
La construction de Besicovitch II



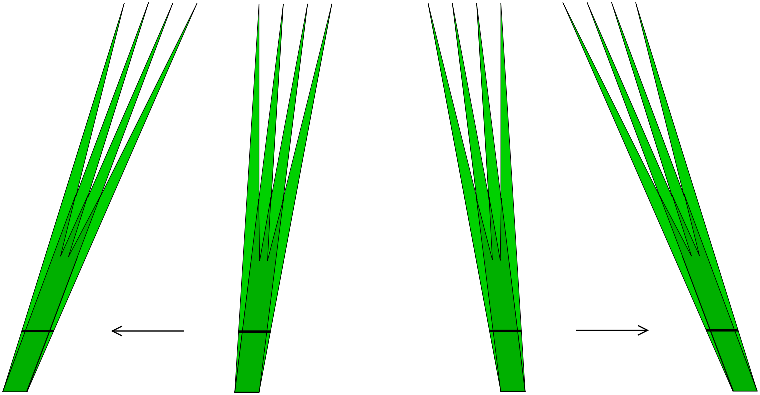
La construction de Besicovitch III



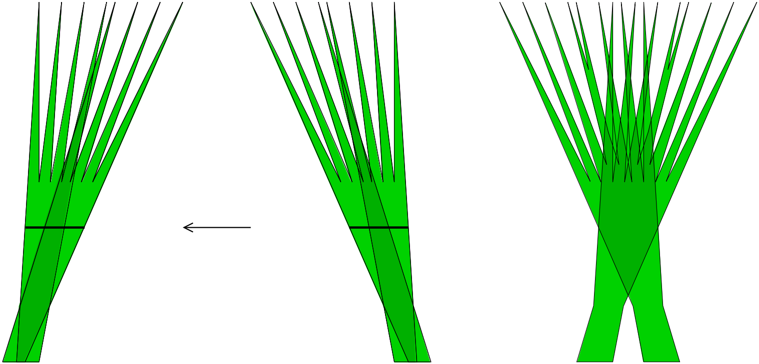
L'arbre de Perron I



L'arbre de Perron II

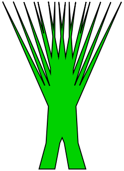


L'arbre de Perron III

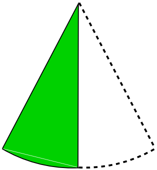


L'arbre de Perron IV

Bilan. – Avec seize pièces et deux étages, l'arbre de Perron a une aire plus petite que la moitié de celle du triangle initial.

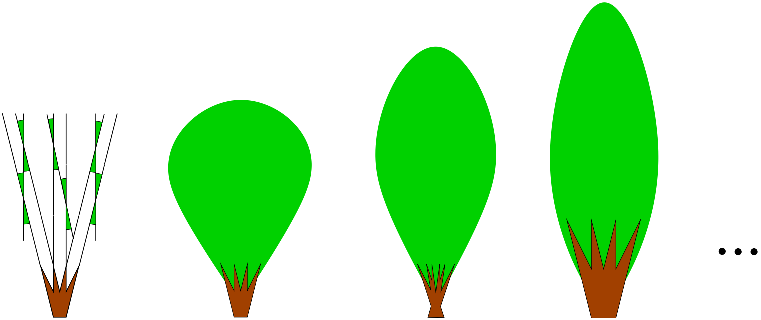


inférieur à



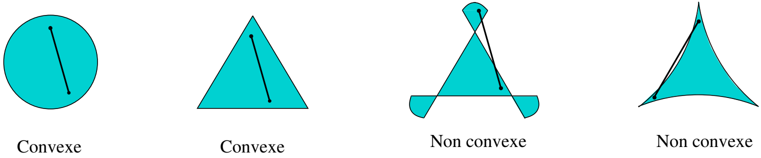
La peau de chagrin

Quelques chiffres. – Avec 24 117 248 pièces et 11 étages, l'arbre de Perron a une aire 5 fois plus petite que celle du triangle initial. Avec 12 393 906 174 523 604 992 pièces et 30 étages, l'aire est divisée par 10.



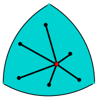
La question de Kakeya pour les convexes

Théorème (Julius Pal, 1921). – *Le plus petit convexe qui permet le retournement de l'aiguille est le triangle équilatéral ayant l'aiguille pour hauteur.*

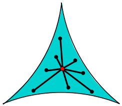


L'énigme des domaines étoilés

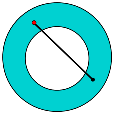
Théorème (F. Cunningham, 1971). – *Si un domaine étoilé permet le retournement de l'aiguille alors son aire est supérieure à* $\pi/108 \simeq 0.02908\ldots$



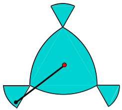
Etoilé



Etoilé

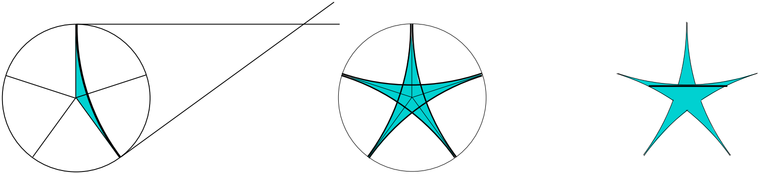


Non étoilé



Non étoilé

La construction de Bloom et Schoenberg (1965)

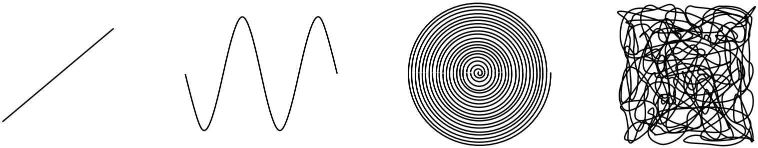


Nombre de branches	Aire de l'étoile
11	0.29044377...
101	0.2843301...
1001	0.2842589...
$\vdots$	$\vdots$
∞	$0.284258224... = \frac{5-2\sqrt{2}}{24}\pi$

Le mouvement brownien

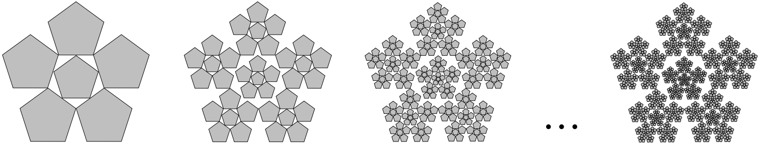
Théorème (Paul Levy, 1948). – *Une trajectoire brownienne est une surface sans aire.*

Le monde des objets d'aire nulle

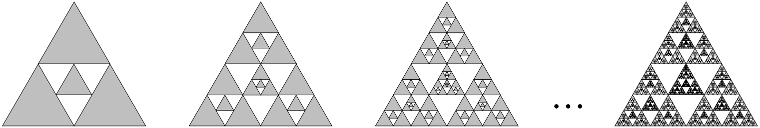


Courbe de Péano (1890). – *Il existe des courbes dont l'image est un carré plein*.

Le procédé d'évidement

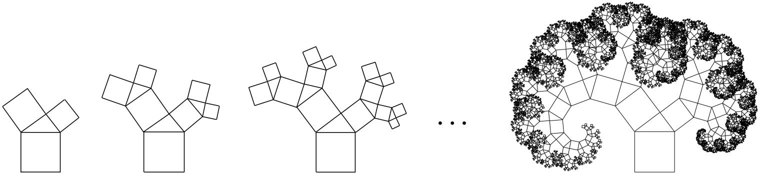


Aire : 1 | 0.82498... | 0.68059... | ... | 0.



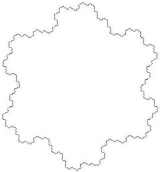
Aire : 1 | 0.8125 | 0.66015... | ... | 0.

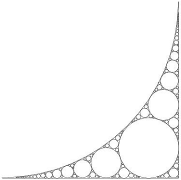
Le procédé d’extension

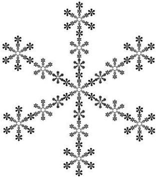


L’ arbre de Pythagore.

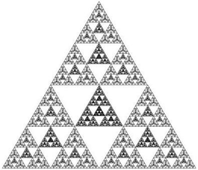
Ensembles d'aire nulle

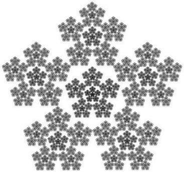


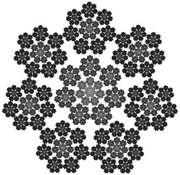




dim. : 1.12... 1.31... 1.50...







dim. : 1.72... 1.80... 1.83...

Epaissisement et dimension

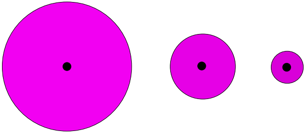
$$Dim(E) = 2 - \lim_{\delta \to 0} \frac{\ln Aire(E_\delta)}{\ln \delta}$$

Le point : dimension 0

Epaississement divisé par 2

$\Downarrow$

Aire divisée par 4

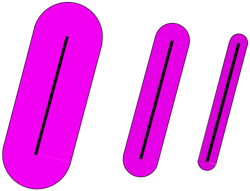


Le segment : dimension 1

Epaississement divisé par 2

$\Downarrow$

Aire divisée par 2

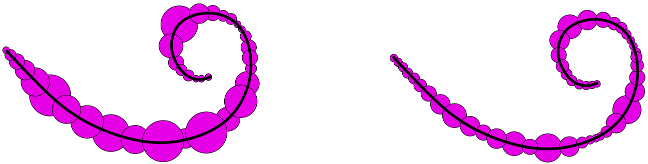


Dimension fractale

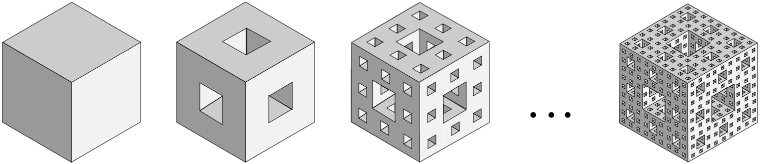
$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf\{\sum r_i^s \mid r_i = \text{rayon du i}^{\text{ème}}\text{disque} \leq \delta\}$$

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E) \in [0, +\infty]$$

$$dim_F(E) = s_0 = \text{point de discontinuité de } s \mapsto \mathcal{H}^s(E).$$



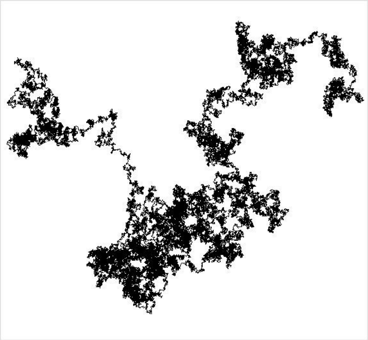
Un exemple



L'éponge de Menger.

Sa dimension fractale est égale à sa dimension de Minkowski et vaut environ 2.73.

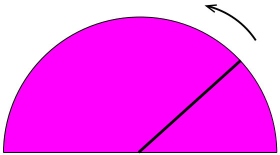
Retour sur le théorème de Levy

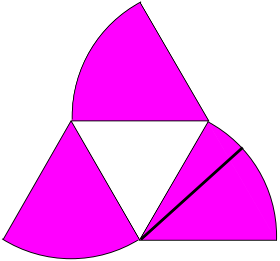


Une trajectoire brownienne est un objet d'aire nulle, sa dimension fractale est 2.

Nouveau problème de Kakeya...

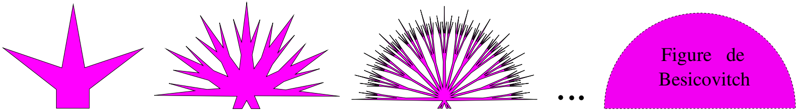
Principe. – On abandonne le mouvement pour ne garder que la géométrie : on demande seulement que la figure *contienne l'aiguille dans toutes ses directions.*





Sa solution

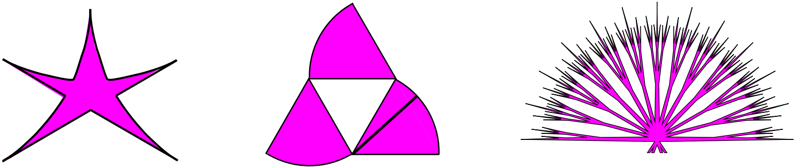
Enoncé. – Existe-t-il une figure de plus petite aire qui contient l'aiguille dans toutes ses directions ?



Réponse (Besicovitch). – Il existe une figure d'aire nulle qui contient l'aiguille dans toutes ses directions.

La question de la dimension fractale

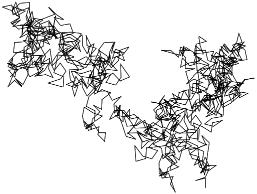
Définition. – On appelle *ensemble de Besicovitch* une figure qui contient l'aiguille dans toutes les directions.

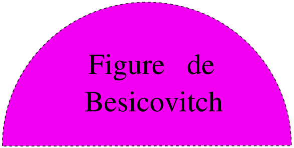


Question. – Existe-t-il un ensemble de Besicovitch dont la dimension fractale soit (strictement) plus petite que deux ?

A la frontière de deux mondes

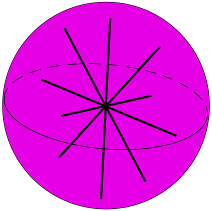
Théorème (Roy O. Davies, 1971). – *La dimension fractale d'un ensemble de Besicovitch vaut deux.*

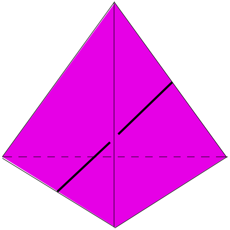




Et dans l'espace ?

Question. – Dans l'espace, existe-t-il un ensemble de Besicovitch dont la dimension fractale soit (strictement) plus petite que trois ?





Conjecture de Kakeya. – Dans l'espace à n dimensions ($n \geq 3$) la dimension fractale d'un ensemble de Besicovitch est n.

Une conjecture féconde I

En analyse : la “ball multiplier conjecture”.

Charles Fefferman, médaille Fields en 1978

Une conjecture féconde II

A l'interface de l'**analyse** et de la **théorie des nombres :** la conjecture de Montgomery.

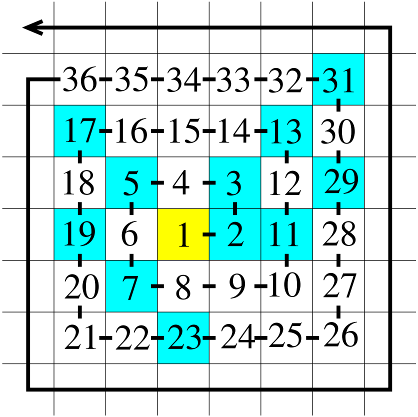
Jean Bourgain, médaille Fields en 1994

Une conjecture féconde III

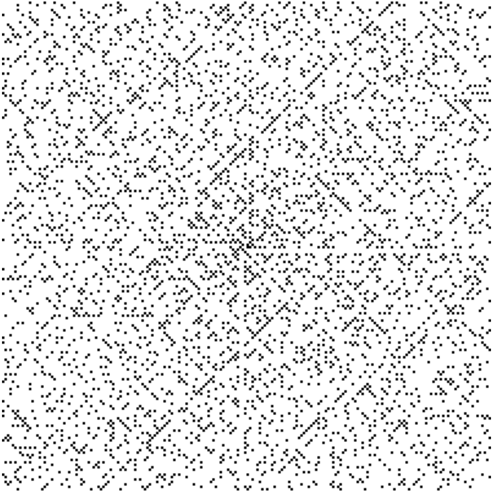
A l'interface de la **théorie des nombres** et de la **combinatoire :** les progressions arithmétiques.

Timothy Gowers, médaille Fields en 1998

La spirale d'Ulam



Les nombres premiers



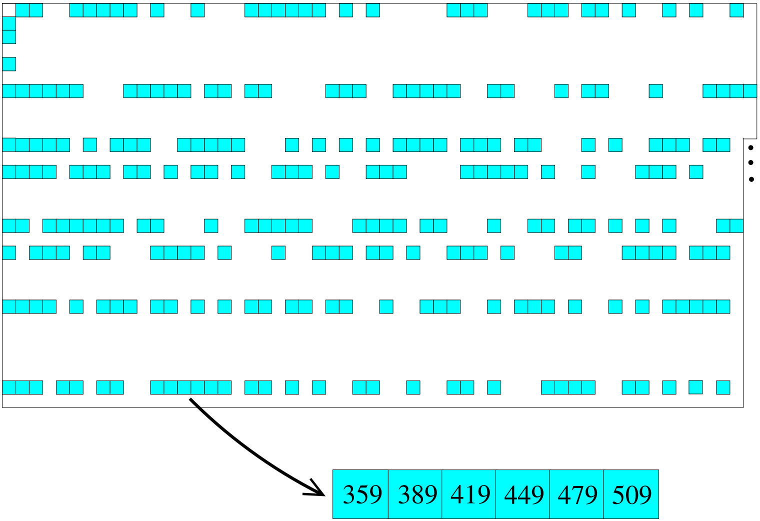
La spirale d'Ulam (1963)

Progressions arithmétiques I

1	7	13	19	25	31	37	43	49	55	61	67	73	79	85	91	97
2	8	14	20	26	32	38	44	50	56	62	68	74	80	86	92	98
3	9	15	21	27	33	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99
4	10	16	22	28	34	40	46	52	58	64	70	76	82	88	94	⋮
5	11	17	23	29	35	41	47	53	59	65	71	77	83	89	95	
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	

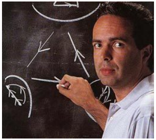
5	11	17	23	29

Progressions arithmétiques II

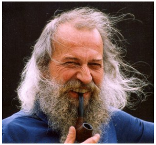


Progressions arithmétiques III

Question. – Existe-t-il des progressions arithmétiques de nombres premiers de toutes longueurs ?



Nik Lygeros



Michel Mizony

Records actuels. – On en connaît explicitement pour $L \leq 24$ et seulement pour $L \leq 10$ si on demande, en outre, que les nombres premiers soient *consécutifs*.

Densité d'un ensemble I

L'ensemble des nombres impairs :

1	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8	**9**	10	**11**	12	**13**	14	**15**	16	• • •

Densité=0.5

L'ensemble des multiples de trois :

1	2	**3**	4	5	**6**	7	8	**9**	10	11	**12**	13	14	**15**	16	• • •

Densité=0.333...

L'ensemble des puissances de 2 :

1	**2**	3	**4**	5	6	7	**8**	9	10	11	12	13	14	15	**16**	• • •

Densité=0

Densité d'un ensemble II

Théorème de Szémérédi (1975). – *Si un ensemble a une densité qui n'est pas égale à zéro alors on peut y trouver des progressions arithmétiques aussi longues que l'on veut.*

L'ensemble des nombres premiers :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	• • •

Densité=0

Densité d'un ensemble III

Théorème (Roth 1956). – *Etant donné un ensemble, on trouvera au moins une progression arithmétique de longueur 3 avant le nombre :*

$$10^{10^{20000}}$$ *si sa densité entre 0 et ce nombre est* 0.5,

$$10^{10^{100000}}$$ *si sa densité entre 0 et ce nombre est* 0.1,

$$10^{10^{1000000}}$$ *si sa densité entre 0 et ce nombre est* 0.01,

etc...

Une application inattendue

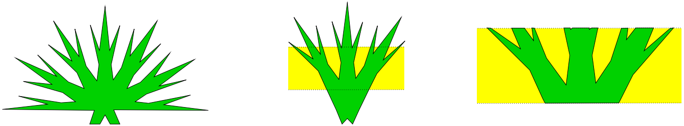
Théorème (Bourgain 1999). – *La dimension fractale d'un ensemble de Besicovitch dans un espace à n dimensions est plus grande ou égale à*

$$0.52n + 0.48.$$

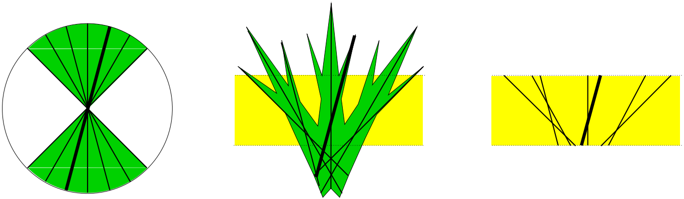
	Conjecture	Résultat de Bourgain
Dimension 3	3	2.04
Dimension 4	4	2.56
Dimension 5	5	3.08
Dimension 10	10	5.68
Dimension 100	100	52.48

Le lien dévoilé

Invariance par homothétie

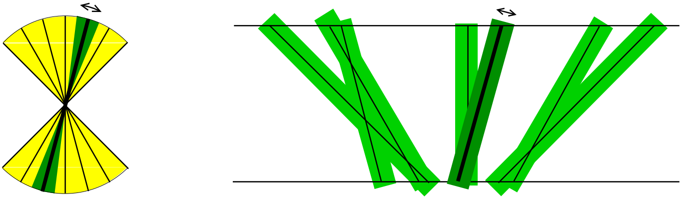


Invariance par découpage

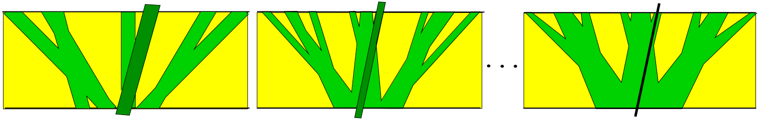


Discrétisation

Epaississement

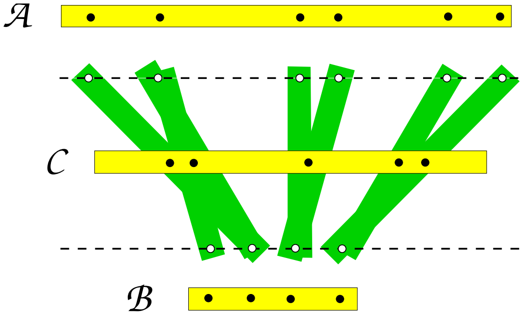


Approximation



Estimation de l'aire

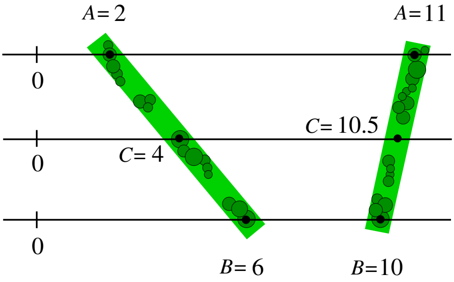
Au plus la dimension fractale est grande, au plus $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ vont grossir rapidement.



Question : Comment m'assurer que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ croissent rapidement ?

Progressions arithmétiques

Réponse : En cherchant des suites arithmétiques de longueur 3 !



$$2 \xrightarrow{+2} 4 \xrightarrow{+2} 6 \qquad 10 \xrightarrow{+0.5} 10.5 \xrightarrow{+0.5} 11$$

La conjecture aujourd'hui

Les meilleurs résultats à l'heure actuelle :

	Résultat	de ...
Dimension 3	2.5	T. Wolff en 1995
Dimension 4	3	T. Wolff en 1995
Dimension 5	3.58..	N. Katz et T. Tao en 2000
Dimension 10	6.51..	N. Katz et T. Tao en 2000
Dimension 100	59.23..	N. Katz et T. Tao en 2000

En 2003, Terence Tao a reçu le *prix Clay* pour ses travaux sur la conjecture de Kakeya.

Le résultat de Green et Tao

Théorème (Green-Tao 2004). – *Soit $L \in \mathbb{N}^*$. Il existe une infinité de progressions arithmétiques de nombres premiers de longueur L.*

La longueur L étant donnée, il en existe une dont tous les termes sont plus petits que

$$2^{2^{2^{2^{2^{2^{2^{100L}}}}}}}$$

Bibliographie