Sous-espaces stables-154

1 Introduction

En général, un sous-espace stable n'admet pas de sous-espace supplémentaire stable (prendre une matrice nilpotente d'indice 2 sur le plan et considérer sa droite propre). Toutefois, on sait décomposer l'espace en sous-espaces particuliers (lemme des noyaux, décomposition de Frobenius).

1.1 L'endomorphisme induit

Si F est stable par u, alors $u\mid_F$ (que l'on note alors u_F) est un endomorphisme de F, et son polynôme minimal divise celui de u. En particulier si u est diagonalisable, u_F l'est également.
De même, si F est stable par u alors, on a un endomorphisme $\overline{u}$ sur E/F qui envoie $x+F$ sur $u(x)+F$. On peut alors faire les mêmes considérations. Les deux endomorphismes, sur un sous-espace stable et sur un quotient se voient très bien matriciellement dans une base adaptée à F. Ce sont respectivement les blocs matriciels A et B dans la matrice ci-dessous.

$$\mathrm{mat}(u) := \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

1.2 Le lemme des noyaux

Le lemme des noyaux (sur $\mathbb{C}$) arrive alors naturellement puisqu'on décompose l'espace E en sous-espaces stables F_i tels que u_{F_i} ait un spectre simple.
Si F est stable et si F_i sont les sous-espaces du lemme des noyaux, alors $F = \oplus_i F_i \cap F$. Pour le montrer, il suffit de réappliquer le lemme des noyaux à u_F et utiliser l'égalité $\ker(\varphi_{F_i}) = \ker(\varphi) \cap F_i$.

1.3 Un lemme premier de Schur

On a vu que si u laisse stable toute droite (et donc tout sous-espace), alors u est une homothétie (idem si laisse stable tout plan...), [H2G2-T1, II-4.3.6].
Donc, si G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que pour toute droite D, il existe g dans G tel que D soit un sous-espace propre d'un élément g de G,

alors son centre $Z(G)$ est réduit aux homothéties de G. C'est le cas de la plupart des groupes classiques, [H2G2-T1, Lemme A.1.23].

2 Adjoint et stabilité

On suppose E muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. On a une notion d'adjoint.
Si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u^*.

Application : théorème spectral (si $u^* = u$ et que la forme est euclidienne, on est dans un cas idéal où on a un supplémentaire (l'orthogonal) stable.

On a des situations analogues, si $u^* = -u$ ou $u^* = u^{-1}$.

3 Stabilisateurs pour une action de GL_n

On va voir le problème par l'autre bout de la lorgnette : partir d'un sous-espace et regarder quels sont les endomorphismes qui le stabilisent.

Oh, que c'est malin, ça ! Cela s'appelle le problème inverse, et c'est une démarche très prisée en mathématiques.
On fait agir $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur une grassmannienne ou sur une variété de drapeaux. Les stabilisateurs permettent de faire un lien entre le groupe agissant et l'orbite. Du coup, on obtient (en faisant agir SO_n ou U_n selon le corps de base) :
• La grassmannienne est compacte, connexe, sur $\mathbb{C}$, [H2G2-T1, Proposition II-4.3.11]
• La variété de drapeaux complets est compacte, connexe sur $\mathbb{C}$, [H2G2-T1, Exercice II-F.21]
• On peut calculer les cardinaux de ces variétés sur des corps finis : [H2G2-T1, Proposition VIII-1.1]

Proposition. Le stabilisateur d'un drapeau dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est résoluble.
Preuve :
Si g et h stabilisent un drapeau, alors, dans une base adaptée au drapeau, leurs matrices respectives sont triangulaires. Soit donc G_n le groupe des matrices inversibles triangulaires supérieures de taille n et U_n le sous-groupe des matrices avec des 1 sur la diagonale.
On veut montrer que G_n est résoluble, et pour cela on se sert du fait que si H est distingué dans G, alors H et G/H résolubles implique G résoluble.
Soit A_n le sous-groupe de U_n constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & & & a_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

Alors, on voit que, par récurrence sur n, G_n est résoluble puisque :
• A_n est distingué dans U_n qui est distingué dans G_n
• G_n/U_n est le groupe abélien $(\mathbb{K}^*)^n$, U_n/A_n est isomorphe à U_{n-1}.

Voici un développement possible :

Théorème de Lie-Kolchin. Réciproquement, si G est un sous-groupe résoluble de $\mathrm{GL}_n(C)$, alors G stabilise un drapeau.

Donc, en gros, la résolubilité dans les groupes, dont on sait déjà qu'elle correspond à la notion de résolubilité dans les équations algébriques, a pour correspondant géométrique la notion de drapeau. Le lien entre les deux notions est la relation "stabilisateur-stabilisé".

4 Sous-espaces cycliques

On a vu que si u laisse stable *toute* droite, alors u est scalaire. Voici la situation inverse, où u stabilise un minimum de sous-espaces : on est à l'opposé des homothéties pour la décomposition de Frobenius, [H2G2-T1, p 105]
Nombre fini de sous-espaces stables ssi u est cyclique ssi $\chi_u = \mu_u$.
Développement possible. Dans ce cas on a même une bijection entre diviseurs unitaires du polynôme caractéristique et sous-espaces stables, [H2G2-T2, Exercice II-B7]

Développement plus simple : on a une preuve express de Cayley-Hamilton à l'aide des sous-espaces cycliques. (Gourdon Algèbre, p 177)

Remarque. Pour une matrice nilpotente cyclique= Tableau de Young en une seule colonne
Le commutant d'un endomorphisme cyclique u est $\mathbb{K}[u]$ (extension de la validité pour le commutant d'une famille d'endomorphismes cycliques qui commutent). Et réciproquement, si le commutant est $\mathbb{K}[u]$, alors u est cyclique, [H2G2-T2, Proposition II-2.2]

Topologie. La condition d'être cyclique est une condition ouverte parce que c'est une réunion d'ouvert

$$\bigcup_{x \in E} \{u,\ \det(x, u(x), \cdots, u^{n-1}(x)) \neq 0\}.$$

[H2G2-T2, exercice II-B6]
C'est aussi un ensemble dense (sur $\mathbb{C}$) puisqu'il contient les matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes.

Algorithme. Voici une façon algorithmique de tester si u est cyclique : u est cyclique ssi $\mathrm{rg}(\mathrm{Id}, u, \cdots, u^{n-1}) = n$.

Et oui, puisque cela assure que le degré de μ_u est égal à n.

Résultat fondamental : Il existe un x dans E tel que le polynôme minimal de u sur x est le polynôme minimal de u. Alors, le sous-espace cyclique engendré par x (qui est bien évidemment un sous-espace stable) possède un supplémentaire stable. On construit par récurrence la décomposition de Frobenius, en somme directe de sous-espaces cycliques, dont les annulateurs se divisent successivement (ce sont les fameux polynômes invariants de similitude de u).

Parallèle : Si on remplace "espace muni d'un endomorphisme" par "groupe abélien fini", "polynôme caractéristique" par "cardinal", "polynôme minimal" par "exposant du groupe", "sous-espace cyclique" par "sous-groupe cyclique", on a le théorème de structure des groupes abéliens finis [1]. Ce parallèle se dit agréablement en termes de modules sur un anneau principal.

5 Semi-simplicité

Critères de semi-simplicité (existence d'un supplémentaire stable pour tout sous-espace stable, polynôme minimal sans multiplicité...), [H2G2-T2, Proposition II-1.6]. Bref, on veut tuer C dans $\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$.
Sur un corps de caractéristique nulle : semi-simple = diagonalisable sur une extension (quitte à prendre une clôture algébrique), [H2G2-T2, Proposition II-1.6]

Contre-exemple. La matrice compagnon de $X^p - T$, avec p premier sur $\mathbb{F}_p(T)[X]$, [H2G2-T2, Exemple II-1.7]

Algorithme. Voici une façon algorithmique de tester si u est semi-simple en caracteristique nulle : u est semi-simple ssi $\frac{\chi_u}{\mathrm{pgcd}(\chi_u,\chi_u')}$ annule u.
Ben oui, puisque u est semi-simple ssi μ_u n'a pas de multiplicité dans sa factorisation en irréductibles. Or, en caractéristique nulle, $\frac{\chi_u}{\mathrm{pgcd}(\chi_u,\chi_u')}$ est le polynôme χ_u "sans multiplicité" dans sa décomposition en irréductibles.

6 Familles de morphismes et théorie des représentations

Codiagonalisation, cotrigonalisation (pas de réciproque pour la trigonalisation).

1. Aviez-vous remarqué que Cayley-Hamilton et Lagrange coïncidaient ? Que de noms prestigieux pour des choses finalement très analogues...

Lemme de Schur. Si le groupe G n'a pas de sous-représentation (sous-espace stable par tout G) non triviale alors les morphismes qui commutent à G sont scalaires (sur $\mathbb{C}$), [H2G2-T2, Proposition X-A.8].
Noter que le lemme de Schur possède une réciproque : en gros, si les morphismes de représentations forment une corps (commutatif ou non), alors la représentation est irréductible, [H2G2-T2, Exercice X-F.13]

Contre-exemple. sur $\mathbb{R}$: prendre un groupe fini de rotations (non scalaires) du plan. Aucune droite n'est stable par G, mais G est abélien (et donc, les rotations de G commutent avec tout G).

Maschke+ unicité des composantes isotypiques, [H2G2-T2, Théorème X-A.8 et Corollaire X-B.12].

L'idée ici est que l'on a, sur $\mathbb{C}$, une forme hermitienne G-invariante, ce qui implique que si un sous-espace F est stable par G, alors son orthogonal l'est également.

L'autre idée, est que l'on a un projecteur sur la composante isotypique de caractère χ. Il est de la forme

$$\pi_\chi(v) = \frac{\chi(e)}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)}(g \cdot v).$$

Du coup, on peut voir la composante isotypique comme l'image de ce projecteur (c'est la manière la plus simple de voir qu'elle ne dépend pas d'un choix de décomposition).

7 Trucs inclassables

• Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, il existe toujours une droite stable.
• Tiens, en dimension $n \geq 3$ sur $\mathbb{R}$ il existe toujours un sous-espace stable non trivial.
• Tant qu'on est sur $\mathbb{R}$: sur $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, un endomorphisme possède toujours un plan stable : si toutes les valeurs propres sont réelles, ok, sinon, prendre un vecteur propre v correspondant à une valeur propre non réelle λ, alors

$$\{\mu v + \overline{\mu v},\ \mu \in \mathbb{C}\}$$

est un sous-espace stable par u de $\mathbb{R}^n$ de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Ceux qui connaissent un peu la théorie de Galois sauront généraliser ceci à une extension galoisienne d'un corps $\mathbb{K}$ fixé.