Université Claude Bernard
Master 1 Algèbre

Corrigé bref du Problème de maison

Exercice 1.

1. $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. (a) Comme G n'est pas abélien, l'ordre d'un élément de G est $1, 2$ ou 4. Si tous les éléments sauf l'élément neutre est d'ordre 2, G est forcément abélien, donc il existe un élément $x \in G$ d'ordre 4. Notons H le sous-groupe de G engendré par x.

   (b) L'ordre de y est 2 ou 4. S'il est 2, alors $y^2 = e$. Supposons que l'ordre de y est 4. Comme $G = H \amalg yH$, on a $y^2 \in H$. Comme y^2 est d'ordre 2, il est forcément x^2.

      i. Comme $G \twoheadrightarrow G/H \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ admet une section $(\bar{1} \mapsto y)$,
      G est isomorphe à $H \rtimes \langle y \rangle \cong D_4$.

      ii. Comme x et y engendré G, on a $yxy^{-1} = x^{-1}$ car H est distingué. Un isomorphe de G dans $\mathbb{H}_8$ est donné en associant x et y à I et J, respectivement.

3. Il y a 5 classes d'isomorphismes: $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, D_4$ et $\mathbb{H}_8$.

Exercice 2.

1. $|G| = 12$. G s'injecte dans $\mathfrak{S}_4$, donc $G \cong \mathfrak{A}_4$.

2. $V_4 \lhd \mathfrak{A}_4$ qui est 2-Sylow, d'où le résultat.

Exercice 3.

1. $|\mathrm{Ker}\pi| = 2$, donc $|H| = 8$. Notons que $|SL_2(\mathbb{F}_3)| = 24$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{F}_3)$ un l'élément d'ordre 2. Alors, on a $a^2 + bc = d^2 + bc = ad - bc = 1$ et $b(a+d) = c(a+d) = 0$. Si $a + d \neq 0$, on en déduit que $b = c = 0$, $a^2 = ad = d^2 = 1$ ce qui implique que $a = d \in \{1, 2\}$. Si $a + d = 0$, on en déduit que $a^2 + bc = -a^2 - bc = 1$ ce qui est impossible.

3. Par 2., il y a un et un seul élément d'ordre 2 dans $SL_2(\mathbb{F}_3)$, donc $\pi|_H$ n'admet pas une section.

4. Par la classification (Ex. 1) des groupes d'ordre 8 et Ex. 3.3., H est isomorphe à $\mathbb{H}_8$.
   (Au lieu d'utiliser Ex. 3.3., on peut aussi compter le nombre des éléments d'ordre 2.)