Correction de l'examen de GCG 2015

Problème 1. *Adhérence des orbites de congruence réelles*

1. Si une forme quadratique est définie positive, elle est en particulier positive sur la sphère, et strictement s'il vous plaît, puisque la sphère ne contient par 0. Réciproquement si une forme quadratique q est strictement positive sur la sphère, alors pour tout u non nul de $\mathbb{R}^n$, $u = \lambda v$ avec λ non nul et v sur la sphère, et donc $q(u) = \lambda^2 q(v) > 0$.

   On va montrer que le complémentaire C de $\mathcal{S}_{n,0}$ dans l'espace des matrices symétriques est fermé. Une matrice A est dans C si et seulement s'il existe v sur la sphère tel que ${}^t vAv \leq 0$. On prend donc une suite (A_k) de matrices dans C qui converge vers A. Il vient qu'il existe une suite (v_k) de vecteurs de la sphère telle que ${}^t v_k A_k v_k \leq 0$. Par compacité de la sphère, il existe une suite extraite de (v_k) qui converge vers un certain vecteur v de la sphère et donc ${}^t vAv \leq 0$ par passage à la limite. On obtient donc que A est dans C et donc que C est fermé.

2. La signature (p, q) d'une matrice symétrique réelle D est donnée par p, le nombre de valeurs propres de D strictement positives et q, le nombre de valeurs propres de D strictement négatives. La signature de D est donc (p, q).

3. En passant k à la limite, on obtient que la matrice $\mathrm{I}_{p-h,q-h'}$ est dans l'adhérence de $\mathcal{S}_{p,q}$. Donc, comme l'action par congruence est continue, toute l'orbite de $\mathrm{I}_{p-h,p-h'}$ est dans cette adhérence. Conclusion, $\mathcal{S}_{p-h,q-h'} \subset \overline{\mathcal{S}_{p,q}}$. Comme ceci est vrai pour tout h et h', on a l'inclusion voulue.

4. On a

$$\mathcal{S}_{p,q} \subset \bigcup_{h,h' \geq 0} \mathcal{S}_{p-h,q-h'} \subset \overline{\mathcal{S}_{p,q}}.$$

   Donc, si $\bigcup_{h,h' \geq 0} \mathcal{S}_{p-h,q-h'}$ est une partie fermée, on l'égalité en prenant l'adhérence dans cette double inégalité.

5. La matrice $S_F = ({}^t e_i A e_j)_{1 \leq i,j \leq p+1}$ est définie positive. Comme l'application $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_{p+1}(\mathbb{R})$, $S \mapsto S_F$ est continue et que l'ensemble $\mathcal{S}_{p+1}^{++}$ des matrices définies positives est ouvert (voir question 1), il existe un voisinage V de S dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur lequel la restriction à F est définie positive: $B_F = ({}^t e_i B e_j)_{1 \leq i,j \leq p+1}$ est définie positive pour tout $B \in V$. Cela entraîne que $V \subset \mathcal{S}_{>p}$. On en déduit que $\mathcal{S}_{>p}$ est un ouvert.

6. L'opposé d'une matrice symétrique de signature (p, q) est une matrice symétrique de signature (q, p). Il en résulte que l'ensemble étudié est le complémentaire de $\mathcal{S}_{>p} \cup -\mathcal{S}_{>q}$, qui est ouvert d'après la question précédente.

Problème 2. *Un algorithme pour la décomposition polaire*

A. *Préliminaires*

1. Par récurrence, on a $u_k > 0$, donc la suite est bien définie. Comme la moyenne arithmétique est supérieure à la moyenne géométrique, on a $u_1 \geq 1$ (on peut aussi le voir sans passer par cet argument). Puis, par récurrence, on obtient de la même manière que $u_k \geq 1$. De plus, $u_{k+1} - u_k = 1/2(u_k^{-1} - u_k)$ qui est négatif car $u_k \geq 1$. Ceci prouve que la suite est décroissante minorée. Elle converge vers une limite l et l vérifie $l = 1/2(l + l^{-1})$ avec $l \geq 1$, ce qui prouve que $l = 1$.

B. *Un algorithme de Newton dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. (a) Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tAA$ est symétrique (clair) et positive, puisque $({}^tAAX, X) = (AX, AX) \geq 0$. Donc, $\mathrm{I}_n + ({}^tAA)$ a toutes ses valeurs propres strictement positives (et même supérieures à 1); ce qui prouve qu'elle est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   (b) C'est une récurrence basée sur la question précédente.

C. *Convergence de la suite* (M_k).

On considère, pour tout k, la décomposition polaire $M_k = O_k S_k$ de M_k.

1. C'est du cours: ${}^tM_k M_k = {}^tS_k\, {}^tO_k O_k S_k = S_k^2$.
2. On a
$$O_{k+1}S_{k+1} = M_{k+1} = 1/2 O_k S_k (I_n + S_k^{-2}) = \frac{1}{2} O_k (S_k + S_k^{-1}).$$
3. On voit que $1/2(S_k + S_k^{-1})$ est la somme de deux matrices symétriques définies positives, et donc elle est symétrique définie positive. Conclusion, l'unicité de la décomposition polaire nous donne que $O_{k+1} = O_k$ et $S_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + S_k^{-1})$.
4. On diagonalise S_k, et simultanément S_k^{-1}. On voit par récurrence que S_k est semblable à une matrice diagonale avec sur la diagonale, des suites de la forme u_k. Comme ces suites tendent vers 1 d'après la question préliminaire, il vient que la limite de S_k est l'identité. La dernière assertion en résulte directement.

Problème 3. *Isomorphisme exceptionnel et application*

A. *L'isomorphisme exceptionnel* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}_0(2,1)$

1. C'est du cours (même si on peut le voir directement). Un groupe de Lie agit par conjugaison sur son algèbre de Lie.
2. L'action par conjugaison est linéaire et il en résulte que le morphisme de l'action va dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{sl}_2)$. Son noyau est le sous-groupe des matrices qui commutent à $\mathfrak{sl}_2$, donc, qui commutent à $\mathcal{M}_2$ car $\mathcal{M}_2 = \mathbb{R}\mathrm{I}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$. Le noyau est donc constitué des homothéties de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\pm\mathrm{I}_2$.
3. Une matrice de $\mathfrak{sl}_2$ est de la forme
$$A := \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix}$$
   Et donc $q(A) = bc + a^2$, qui donne bien une forme quadratique.

   La méthode de Gauss donne
$$q(A) = bc + a^2 = \frac{1}{4}(b+c)^2 - \frac{1}{4}(b-c)^2 + a^2.$$
   La forme q est donc de signature $(2,1)$.
4. On a vu en cours que $O(2,1)$ est un groupe de Lie, car $M \mapsto M\mathrm{I}_{2,1}\,{}^tM$ définit une submersion sur l'espace des matrices symétriques. Il en résulte que l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(2,1)$ est le noyau de la différentielle de cette application, c'est-à-dire, le sous-espace des matrices M qui vérifient $M\mathrm{I}_{2,1} + \mathrm{I}_{2,1}\,{}^tM = 0$.

   Pour la dernière assertion, il suffit de voir que $\mathrm{SO}_0(2,1)$ est la composante connexe de l'identité de $\mathrm{O}(2,1)$ et que l'algèbre de Lie est l'espace tangent en l'identité.

5. On transforme l'équation précédente par un calcul par blocs, avec
$$M = \begin{pmatrix} A & {}^tX \\ Y & z \end{pmatrix},$$
où A est une matrice carrée de taille 2, X, Y deux matrices colonnes et z un scalaire. On trouve
$${}^tA + A = 0,\ X = Y,\ z = 0.$$
Le sous-espace est donc de dimension 3.

6. C'est principalement fait en cours. Tout d'abord, le morphisme d'action envoie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{O}(q)$, car le déterminant préserve la conjugaison. Comme q est de signature $(2,1)$, on obtient un isomorphisme entre $\mathrm{O}(q)$ et $\mathrm{O}(2,1)$, et donc un morphisme de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{O}(2,1)$. Comme $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est connexe, il en résulte que ce morphisme est à valeurs dans la composante connexe $\mathrm{SO}_0(2,1)$ de l'identité. La différentielle est une application linéaire entre deux espaces de dimension 3, on voit facilement qu'elle est injective, donc surjective. D'après le théorème d'inversion locale, l'image contient un ouvert. Comme l'image est un sous-groupe, l'image est ouverte, donc fermée, mais comme $\mathrm{SO}_0(2,1)$ est connexe, on a que l'image est justement $\mathrm{SO}_0(2,1)$.

   Au final, on a une application surjective de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{SO}_0(2,1)$ et donc l'isomorphisme annoncé puisque le noyau est donné par les homothéties.

B. *Sous-espaces maximaux de matrices diagonalisables*

1. Il n'y a que la maximalité qui ne soit pas tout à fait claire. Comme sa dimension est égale à 3, si le sous-espace n'était pas maximal, alors il existerait un sous-espace de dimension 4 de matrices diagonalisables. Donc toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ serait diagonalisable. Absurde.

2. Le polynôme caractéristique de S est $X^2 - q(S)$. Si $q(S) < 0$, alors S est non diagonalisable (polynôme caractéristique non scindé). Si $q(S) = 0$, alors les valeurs propres sont nulles. Si S était diagonalisable, S serait la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas par hypothèse. Si $q(S) > 0$ alors, les valeurs propres sont réelles et distinctes. On a donc bien que S est diagonalisable.

3. (a) C'est le théorème de Witt. Deux plans sur lesquels Q est définie positive sont isométriques et donc, on peut relever cette isométrie en une isométrie de l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier.

   (b) C'est donné par le cours:
   $$\mathrm{diag}(1,1,1),\ \mathrm{diag}(-1,1,-1),\ \mathrm{diag}(1,1,-1),\ \mathrm{diag}(-1,1,1)$$
   Le plan P_0 engendré par les deux premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ fait l'affaire.

   Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des plans sur lesquel Q est définie positive. On a vu que $\mathrm{O}(2,1).P_0 = \mathcal{D}$, par transitivité. De plus, $\mathrm{O}(2,1) = \mathrm{SO}_0(2,1) \cup \mathrm{SO}_0(2,1)g \cup \mathrm{SO}_0(2,1)h \cup \mathrm{SO}_0(2,1)k$, avec g, h, k qui stabilisent P_0. Ceci prouve que $\mathrm{SO}_0(2,1).P_0 = \mathcal{D}$.

4. Le problème, vu dans $\mathfrak{sl}_2$, provient de la question précédente et de l'isomorphisme exceptionnel prouvé ci-dessus. On prolonge sans mal à tout $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par la décomposition $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\mathrm{I}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$.